UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie

S T A T I S T I K 2

Lösungsblätter zu den Übungen

Wintersemester 2006/2007

Prof. Dr. G. Bol, Dr. M. Höchstötter
Dipl.-Math. Sebastian Kring
Institut für Statistik
und Mathematische Wirtschaftstheorie
D-76128 Karlsruhe

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter λ.

(a) Bestimmen Sie für die Zufallsvariable Y mit $Y := \sqrt{X}$ die Dichte- und Verteilungsfunktion. Berechnen Sie weiterhin den Median und den Erwartungswert von Y, und vergleichen Sie diese mit den korrespondierenden Größen der Zufallsvariable X.

(b) Bestimmen Sie für die Zufallsvariablen Z_i, $i = 1, 2$ mit $Z_1 := \exp(-\lambda X)$ und $Z_2 := 1 - \exp(-\lambda X)$ die Dichte- und Verteilungsfunktion. Berechnen Sie weiterhin Median und Erwartungswert von Z_i, $i = 1, 2$ und vergleichen Sie diese mit den korrespondierenden Größen der Zufallsvariable X.

(c) Nennen Sie ein Beispiel für eine Transformation T bei der der Median der Zufallsvariablen $T(X)$ nicht mit $T(x_Z)$ übereinstimmt (hierbei bezeichnet x_Z den Median der Zufallsvariable X) .

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S. 91ff)

Für den Median und den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariablen gilt:

$$x_Z = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad EX = \frac{1}{\lambda}.$$

(a) Für die Transformation T gilt:

$$\begin{aligned} T \ &: \ \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto \sqrt{x} =: y \end{aligned}$$

und für die Ableitung bzw. Umkehrfunktion ergibt sich:

$$T'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad T^{-1}(y) = y^2$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Transformationsformel für Dichten:

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \frac{f_X(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|} = \frac{\lambda e^{-\lambda y^2}}{\frac{1}{2\sqrt{y^2}}} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \\ &= 2y\lambda e^{-\lambda y^2} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion erhält man gemäß

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \int_{-\infty}^{t} g_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{t} 2y\lambda e^{-\lambda y^2} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\, dy \\ &= -e^{-\lambda y^2}\Big|_0^t = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t^2} & \text{für } t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich der Median y_Z der Verteilung gemäß

$$G_Y(y_Z) \stackrel{!}{=} 0.5 \iff y^2 = \frac{\ln 2}{\lambda} \implies y = \sqrt{\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Man erkennt, dass der Median von Y dem transformierten Median von X entspricht: $y_Z = T(x_Z)$.

Der Erwartungswert berechnet sich mit Hilfe der partiellen Integration gemäß

$$\begin{aligned} EY &= \int_{\mathbb{R}} y \cdot g_Y(y)\, dy = \int_0^\infty \underbrace{y}_{=:u} \cdot \underbrace{2y\lambda e^{-\lambda y^2}}_{=:v'}\, dy \\ &= \underbrace{y}_{=u} \cdot \underbrace{-e^{-\lambda y^2}}_{=v} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{1}_{=u'} \cdot \underbrace{-e^{-\lambda y^2}}_{=v}\, dy \end{aligned}$$

und das verbleibende Integral wird nun als ein Integral über die Dichtefunktion einer Normalverteilung ausgedrückt:

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{2\lambda}}} e^{-\frac{y^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}\, dy}_{=1} = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$$

Man erkennt, dass der Erwartungswert von Y nicht mit dem transformierten Erwartungswert von X übereinstimmt.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(t) &= P\left(e^{-\lambda X} \le t\right) = P(-\lambda X \le \log t) = P\left(X \ge -\frac{\log t}{\lambda}\right) \\ &= 1 - P\left(X \le -\frac{\log t}{\lambda}\right) = 1 - F_X\left(-\frac{\log t}{\lambda}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad t \le 0 \\ t & , \quad 0 < t \le 1 \\ 1 & , \quad t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und für die Dichtefunktion ergibt sich durch Differentiation

$$f_{Z_1}(z) = \mathbf{1}_{(0,1)}(z)$$

Die Zufallsvariable Z_1 ist somit gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$: $Z_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Da für die Zufallsvariable Z_2 gilt: $Z_2 = 1 - Z_1$ ergibt sich direkt, dass die Zufallsvariable Z_2 ebenfalls gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$ ist: $Z_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Bekanntlich gilt für den Median und den Erwartungswert einer auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariable:

$$q_{0.5}(Z_1) = q_{0.5}(Z_2) = E(Z_1) = E(Z_2) = 0.5$$

und somit ergibt sich der Median von $Z_{1/2}$ wiederum durch Transformation des Medians von X.

(c) Betrachtet man die Funktion $T(x) = (x - \frac{\ln 2}{\lambda})^2$, so gilt für den transformierten Median $T(\frac{\ln 2}{\lambda}) = 0$. Der Median der transformierten Zufallsvariable $T(X)$ kann aber unmöglich 0 sein, da gilt:

$$P(T(X) \leq 0) = 0 \quad \text{und} \quad P(T(X) \geq 0) = 1.$$

Aufgabe 2

Die diskrete Zufallsvariable X habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.2	0.1	0.1	0.1	0.05	0.3	0.15

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen Y mit $Y = |X+1|$. Berechnen Sie weiterhin den Median, den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S.91ff)

(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y = |X+1|$

Es gilt :

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= P(|X+1| = y) \\ &= P(\{\omega | X(\omega) \in \{x_i| \, |x_i+1| = y\}\}) \\ &= \sum_{x_i : |x_i+1| = y} P(X = x_i) \end{aligned}$$

$$\text{z.B.} \quad \begin{aligned} P(Y=2) &= P(|X+1| = 2) \\ &= P(X = 1 \text{ und } X = -3) \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Analog ergeben sich die restlichen Einträge der folgenden Tabelle:

y	0	1	2	3	4
$P(Y=y)$	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

(b) Erwartungswert von Y:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \, P(|X+1| = y_i) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + 1| \cdot P(X = x_j) = 2.2 \end{aligned}$$

Hier einfacher : $E(Y)$ über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y berechnen.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^{4} i \cdot P(Y = i) \\ &= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.15 \\ &= 2.2 \end{aligned}$$

Der Median von Y kann nicht durch Transformation des Medians von X berechnet werden, da die Transformation nicht monoton ist. Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ergibt sich direkt: $y_Z = 2 = \min\{y \,|\, P(Y \leq y) > 0.5\}$

Varianz von Y:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \cdot P(Y = y_i) \\
&= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.15 \\
&= 6.3
\end{aligned}
$$

und hieraus ergibt sich:

$$Var(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 6.3 - (2.2)^2 = 1.46$$

Aufgabe 3

Gegeben seien eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X sowie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$g(x) = |x| + 4 \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $P(g(X) \in [a, b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$.

(b) Berechnen Sie $P(g(X) \leq 4.4)$.

(c) Berechnen Sie $E(g(X))$

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S.84ff)

(a) $g(x)$ ist nicht invertierbar. deshalb die Transformationsformel für Dichtefunktionen nicht anwendbar.

Es gilt:

$$P(g(X) \in [a, b]) = F_{g(X)}(b) - F_{g(X)}(a)$$

und für $F_{g(X)}(u)$ mit $u \geq 4$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(u) &= \int\limits_{g(x) \leq u} f_X(x)\, dx = \int\limits_{|x|+4 \leq u} f_X(x)\, dx \\ &= \int\limits_{4-u}^{u-4} f_X(x)\, dx = F_X(u-4) - F_X(4-u) \end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $4 \leq a < b$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} P(g(X) \in [a, b]) &= F_{g(X)}(b) - F_{g(X)}(a) \\ &= F_X(b-4) - F_X(4-b) - F_X(a-4) + F_X(4-a) \\ &= F_X(b-4) - F_X(a-4) + (F_X(4-a) - F_X(4-b)) \\ &= P(X \in [a-4, b-4]) + P(X \in [4-b, 4-a]) \end{aligned}$$

Beispiel: $P(g(X) \in [6, 8]) = P(X \in [2, 4]) + P(X \in [-4, -2])$

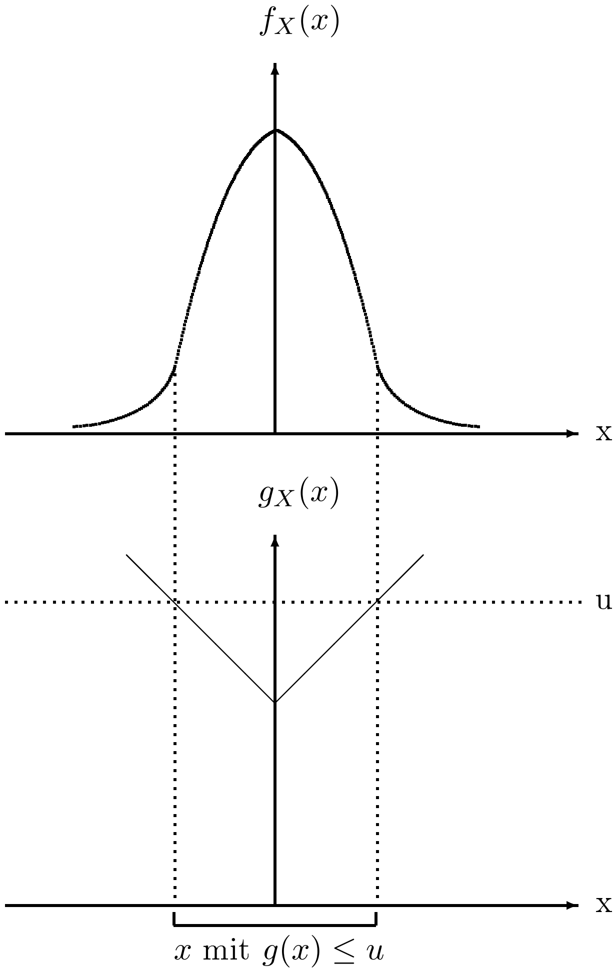


Abbildung 1: Veranschaulich der Transformation

(b)

$$P(g(X) \leq 4.4) = \int_{g(x)\leq 4.4} f_X(x)\,dx = \int_{-0.4}^{0.4} f_X(x)\,dx$$
$$= 2\Phi(0.4) - 1 = 0.3108$$

(c) Für den Erwartungswert von $g(X)$ ergibt sich:

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (|x| + 4)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + 4$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-e^{-\frac{x^2}{2}})\Big|_0^{\infty} + 4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 4$$

Aufgabe 4

X sei eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilung durch die folgende von einem Parameter $\gamma > 0$ abhängende Dichtefunktion $f_\gamma(x)$ bestimmt ist:

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \cdot (1-x)^{(\frac{1}{\gamma}-1)} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

(a) Skizzieren Sie den Verlauf der Dichtefunktion $f_\gamma(x)$ für die Fälle $\gamma = 0.5$ und $\gamma = 2$.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_\gamma(t)$ der Zufallsvariablen X.

(c) Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgende Momente:

$$E(1-X)^n,\ E(X),\ Var(1-X),\ Var(X)$$

(d) Berechnen Sie eine Dichte der Zufallsvariablen $Y := -\ln(1-X)$

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 64ff, 69ff, 91ff und 109 ff)

(a) Für $\gamma = 2$, 0.5 ergeben sich folgende Dichtefunktionen:

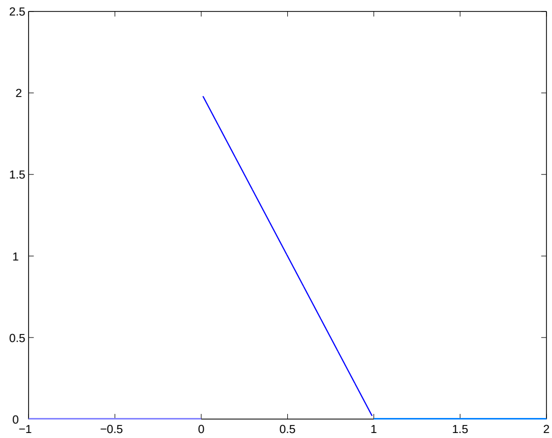
$$f_{0.5}(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(1-x)}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

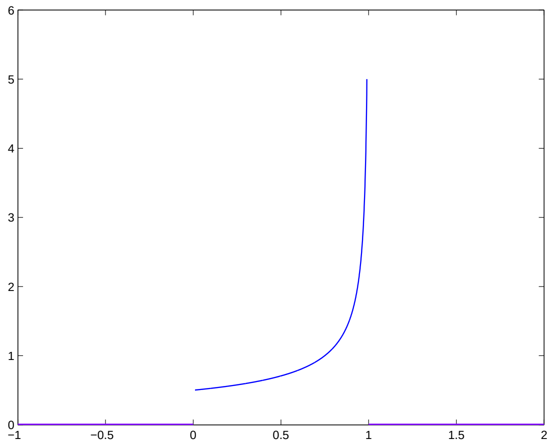
(b) Für die Verteilungsfunktion $F_\gamma(t)$ gilt:

$$F_\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\gamma(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 1 \\ \int_0^t \frac{1}{\gamma} \cdot (1-x)^{(\frac{1}{\gamma}-1)}\, dx & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 1 \\ 1-(1-t)^{\frac{1}{\gamma}} & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}.$$



(a) $f_{0.5}(x) = -2x + 2 \cdot \mathbf{1}_{(0,1)(x)}$



(b) $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)(x)}$

Abbildung 2: Skizzen der Dichtefuntionen

(c)

$$\begin{aligned} E\left((1-X)^n\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1-x)^n f_\gamma(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\gamma}(1-x)^{(n+\frac{1}{\gamma}-1)}\,dx \\ &= -\frac{1}{\gamma n+1}(1-x)^{(n+\frac{1}{\gamma})}\Big|_0^1 = \frac{1}{n\gamma+1} \\ E(X) &= -(E(1-X))+1 \overset{s.o.}{=} \frac{\gamma}{1+\gamma} \\ Var(1-X) &= E((1-X)^2)-(E(1-X))^2 \overset{s.o.}{=} \frac{1}{2\gamma+1} - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \\ Var(X) &= 0+(-1)^2 Var(X) = Var(1)+Var(-X) = Var(1-X) \end{aligned}$$

(d) Für den Wertebereich von Y gilt, da $X \in (0,1)$, dass $Y \in (0,\infty)$; desweiteren ist die Transformation bijektiv. Damit erhält man bereits für die Dichte $g_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$.

Alternative 1: Man berechnet die Verteilungsfunktion $G_Y(t)$ und erhält dann eine Dichte $g_Y(y)$ durch Differentiation:

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(-\ln(1-X) \leq t) = P(\ln(1-X) \geq -t) \\ &= P(1-X \geq e^{-t}) = P(X \leq 1-e^{-t}) = F_X(1-e^{-t}) \\ &= 1-(1-(1-e^{-t}))^{\frac{1}{\gamma}} = 1-e^{-\frac{t}{\gamma}} \Rightarrow \\ g_Y(y) &= \frac{1}{\gamma}e^{-\frac{y}{\gamma}} \text{ für } y > 0 \end{aligned}$$

Alternative 2: Transformationsformel mit

$$g_Y(y) = \frac{f_X(T^{-1}(y)}{|T'(T^{-1}(y))|}$$

Aufgabe 5

Eine Zufallsvariable X mit $0 < X < 1$ habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda x}{1-x}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} ,$$

mit festem Parameter $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie eine Dichte f_X zu X.

(b) Es sei $Y := T(X)$ die Zufallsvariable, die aus X durch die Transformation

$$T : x \mapsto \frac{x}{1-x}$$

hervorgeht. Bestimmen Sie den Wertebereich von Y und geben Sie eine Dichte g_Y zu Y an. Wie heißt die Verteilung der Zufallsvariablen Y?

(c) Bestimmen Sie

$$E\left(\frac{X}{(1-X)^2}\right)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $X = X(1-X) + X^2$

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 64ff, 69ff, 91ff und 109 ff)

(a) Die Dichtefunktion berechnet sich als Ableitung der Verteilungsfunktion und somit gilt für $0 < x < 1$:

$$f_X(x) = F_X^{'}(x) = e^{-\frac{\lambda x}{1-x}} \cdot \frac{\lambda(1-x) + \lambda x}{(1-x)^2}$$

und es ergibt sich:

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\lambda}{(1-x)^2} \cdot e^{-\frac{\lambda x}{1-x}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Wertebereich von Y:

$$Y = \frac{X}{1-X} = \frac{-(1-X)+1}{1-X} = -1 + \frac{1}{\underbrace{1-X}_{\in(1,\infty)}} \in (0, \infty)$$

Berechnung der Verteilung von Y:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(\frac{X}{1-X} \leq t) \\ &= P(X \leq t(1-X)) = P((1+t)X \leq t) \\ &= P(X \leq \frac{t}{1+t}) = F_X(\frac{t}{1+t}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{t}{1+t} \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda \frac{t}{1+t}}{1-\frac{t}{1+t}}} & \text{für } 0 < \frac{t}{1+t} < 1 \\ 1 & \text{für } \frac{t}{1+t} \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } 0 < t \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dichte zu Y lautet damit

$$f_Y(t) \quad = \quad \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Alternativ kann auch die Transformationsformel angewendet werden und führt zu den gleichen Ergebnissen.

Y ist exponentialverteilt mit Parameter λ.

(c) Mit Hilfe des Hinweises ergibt sich:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X}{(1-X)^2}\right) &= E\left(\frac{X}{1-X}\right) + E\left(\left(\frac{X}{1-X}\right)^2\right) \\ &= E(Y) + E(Y^2) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

(a) Die Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt. Berechnen Sie für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ die Dichtefunktion der Zufallvariablen Y mit $Y := \exp(\sigma X + \mu)$.

(b) Berechnen Sie den Modalwert und den Median der Zufallsvariablen Y.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

(d) Skizzieren Sie die Dichtefunktion von Y für eine geeignete Wahl der Parameter μ, σ und tragen Sie die berechneten Lageparameter im Schaubild ein.

Bemerkung: Die Verteilung von Y heißt Lognormalverteilung $LN(\mu, \sigma)$ und spielt in der Finanzmathematik eine bedeutende Rolle.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 64ff, 69ff, 91ff und 109 ff)

(a) Für die Transformation T gilt:

$$\begin{aligned} T \;:\; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^{\sigma x + \mu} =: y \end{aligned}$$

und für die Ableitung bzw. Umkehrfunktion ergibt sich:

$$T'(x) = \sigma e^{\sigma x + \mu}, \quad T^{-1}(y) = \frac{1}{\sigma}(\log(y) - \mu)$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Transformationsformel für Dichten:

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \frac{f_X(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(y)-\mu)^2} \cdot \frac{1}{\sigma e^{\log(y)}} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(y)-\mu)^2} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

(b) Der Modalwert entspricht der Maximalstelle der Dichtefunktion. Da $g(y)$ für $y \to 0$ und $y \to \infty$ verschwindet, lautet die notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} g_y'(y) \\ &= -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(y)-\mu)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(y)-\mu)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)(\log(y) - \mu) \cdot \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\sigma^2}(\log(y) - \mu) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = e^{\mu - \sigma^2}, \end{aligned}$$

d.h. der Modalwert lautet: $y_M = e^{\mu - \sigma^2}$.

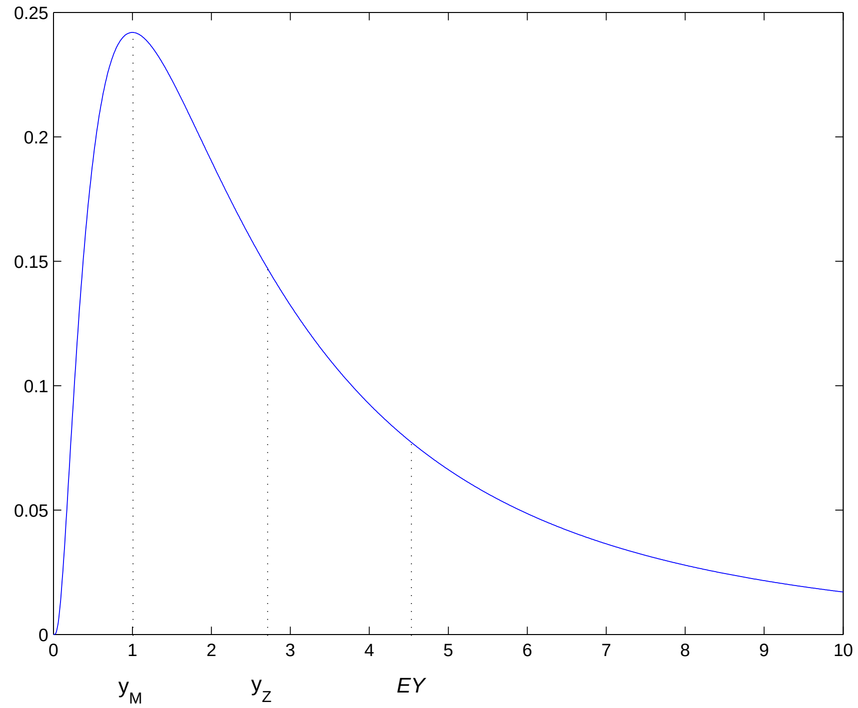


Abbildung 3: Dichtefuntion der Lognormalverteilung mit Parametern $\mu = 1$, $\sigma = 1$

Der Median von Y entspricht dem 0.5-Quantil der Verteilung von Y und lässt sich wie folgt aus der Verteilung von X berechnen:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(e^{\sigma X + \mu} \leq y) = P(X \leq \frac{1}{\sigma}(\log(y) - \mu)) \overset{!}{=} \frac{1}{2} \\ \overset{X \sim N(0,1)}{\Longrightarrow} & \quad \frac{1}{\sigma}(\log(y) - \mu) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \log(y) = \mu \\ \Rightarrow & \quad t = e^{\mu}, \end{aligned}$$

d.h. der Median lautet: $y_Z = e^{\mu}$.

(c) Der Erwartungswert EY lässt sich prinzipiell auf zwei Arten berechnen:

$$EY = \int_{\mathbb{R}} y \cdot g_Y(y)\, dy \quad \text{und} \quad EY = E(e^{\sigma X + \mu}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma x + \mu} \cdot f_X(x)\, dx$$

Hier wählen wir die zweite Variante:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma x + \mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + \sigma x + \mu}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\sigma)^2 - \sigma^2 - 2\mu]}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2 + \mu + \frac{\sigma^2}{2}}\, dx \\ &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2}\, dx = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \end{aligned}$$

d.h. der Erwartungswert lautet: $EY = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

Aufgabe 7

In einer automatischen Überwachungsanlage besteht $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aus Messwert-Kombinationen, die an k Kontrollinstrumenten prinzipiell beobachtbar sind. Nach Experteneinschätzung gilt ein Bereich $S \subset \Omega$ als kritisch ("Störfall"). Eine Modellrechnung liefert eine Wahrscheinlichkeit $P(S) = 2 \cdot 10^{-4}$. Eine weitere Zuverlässigkeitsanalyse liefert die Wahrscheinlichkeiten $P(A|S) = 0.95$ für Alarm, wenn ein Störfall vorliegt (Entdeckungswahrscheinlichkeit), und außerdem $P(A^c|S^c) = 0.99$ für Nichtalarm im unkritischen Bereich.

Für das technische System sind zu berechnen:

(a) die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für Alarm,

(b) die Wahrscheinlichkeit $P(S^c|A)$, dass ein Alarm ein Fehlalarm ist,

(c) die Wahrscheinlichkeit $P(S|A^c)$ für einen unentdeckten Störfall.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S. 91ff)

Nach Definition gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Daraus ergibt sich:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse (Hypothesen oder Zustände), mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

und $b_1, \ldots, b_m$ Ereignisse (Beobachtungen, Versuchsergebnisse) mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} b_i = \Omega, b_i \cap b_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(b_1) &= \sum_{i=1}^{n} P(b_1|A_i) \cdot P(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(b_1 \cap A_i) \end{aligned}$$

Satz von Bayes: Die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese A_1 genügt bei Eintreten von b_1 folgender Gleichung:

$$P(A_1|b_1) = \frac{P(A_1 \cap b_1)}{P(b_1)} = \frac{P(b_1|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(b_1|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Als Anwendung in der Aufgabe wählen wir:

- Hypothesen: Störfall(S)/kein Störfall(S^c)
- Beobachtungen: Alarm (A)/ kein Alarm (A^c)

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\text{(a) } P(A) &= P(A|S)\cdot P(S) + P(A|S^c)\cdot P(S^c) \text{ (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)}\\
&= 0.95\cdot 2\cdot 10^{-4} + 0.01\cdot(1-2\cdot 10^{-4}) = 0.01017
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } P(S^c|A) &= \frac{P(S^c\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|S^c)\cdot P(S^c)}{P(A)} = \frac{0.01\cdot(1-2\cdot 10^{-4})}{0.01017}\\
&= 0.9813
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c) } P(S|A^c) &= \frac{P(S\cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c|S)\cdot P(S)}{P(A^c)} = \frac{0.05\cdot 2\cdot 10^{-4}}{1-0.01017}\\
&= 0.0000099
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

(a) Hans Wiwi wird auf einer Reise durch den afrikanischen Urwald von Angehörigen eines Kannibalenstammes überfallen und ist dem Tode im Kochtopf geweiht.

Nach langem Flehen gewährt ihm der Stammesführer, der einen ausgeprägten Sinn für Glücksspiele besitzt, folgende letzte Chance:

Hans Wiwi hat eine Stunde Zeit, 200 Kugeln (100 rote und 100 schwarze) gezielt auf zwei Schälchen zu verteilen, wobei keines der Schälchen leer bleiben darf. Anschließend muss er mit verbundenen Augen zufällig ein Schälchen auswählen und hieraus wiederum rein zufällig eine Kugel ziehen. Ist die gezogene Kugel schwarz, so wird er durch den Stammesführer begnadigt, andernfalls ...

Wie sollte Hans Wiwi die Kugeln aufteilen um eine maximale Überlebenschance zu haben und wie groß ist diese?

(b) Nachdem Hans Wiwi unversehrt nach Hause zurückgekehrt ist, erfährt er, dass das Gebiet, das er bereist hat, von einer gefährlichen Seuche heimgesucht wurde. Er recherchiert, dass ca. 0.1% der Urlauber sich auf einer Reise in dieses Gebiet mit dem Virus infizieren und dass es einen Test gibt, der bei 99% der Infizierten positiv ausfällt und bei 98% der Gesunden ein negatives Resultat liefert.

Hans Wiwi nimmt an diesem Test teil und sein Ergebnis ist positiv. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Hans wirklich krank?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S. 91ff)

(a) Es bezeichne n_A die Gesamtanzahl an Kugeln in Schälchen A und k die Anzahl an schwarzen Kugeln in Schälchen A. Die Anzahl an Kugeln in Schälchen B beträgt demnach $n_B = 200 - n_A$ und die Anzahl an schwarzen Kugeln in Schälchen B ist $100 - k$. Man stellt fest, dass für $n_A = 100$ die Überlebenswahrscheinlichkeit $P(G)$ unabhängig von k bei 50 Prozent liegt:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\text{schwarz} \mid A) \cdot P(A) + P(\text{schwarz} \mid B) \cdot P(B) \\ &= \frac{k}{100} \cdot 0.5 + \frac{100-k}{100} \cdot 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Durch Umbenennung der Schälchen ist es im Falle $n_A \neq 100$ immer möglich, dass gilt: $n_A < 100$. In diesem Falle gilt für beliebiges aber festes n_A:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\text{schwarz} \mid A) \cdot P(A) + P(\text{schwarz} \mid B) \cdot P(B) \\ &= \frac{k}{n_A} \cdot 0.5 + \frac{100-k}{200-n_A} \cdot 0.5 \\ &= k \cdot \underbrace{\left(\frac{100-n_A}{n_A(200-n_A)} \right)}_{>0} + \frac{50}{200-n_A}, \quad k = 0, \ldots, n_A \end{aligned}$$

d.h die Gewinnwahrscheinlichkeit wird maximal falls gilt: $k = n_A$. Hierfür gilt wiederum:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\text{schwarz} \mid A) \cdot P(A) + P(\text{schwarz} \mid B) \cdot P(B) \\ &= \frac{k}{n_A} \cdot 0.5 + \frac{100-k}{200-n_A} \cdot 0.5 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{100-n_A}{200-n_A}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{100}{200-n_A}\right), \end{aligned}$$

d.h die Gewinnwahrscheinlichkeit wird maximal falls gilt $n_A = 1$ und für die Überlebenswahrscheinlichkeit gilt dann $P(G) = \frac{149}{199} \approx 0.75$.

(b) Man berechnet analog zu Aufgabe 7 mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(\text{positiv}) &= P(\text{positiv} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(\text{positiv} \mid \text{gesund}) \cdot P(\text{gesund}) \\ &= 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097 \\ P(\text{krank} \mid \text{positiv}) &= \frac{P(\text{krank} \cap \text{positiv})}{P(\text{positiv})} = \frac{P(\text{positiv} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(\text{positiv})} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} = 0.04721 \end{aligned}$$

Hans Wiwi muss sich somit keine allzu großen Sorgen machen, denn ein positives Testergebnis bedeutet nur in 5% aller Fälle, dass man wirklich infiziert ist.

Aufgabe 9

(a) Zwei Firmen stellen ein Produkt unter Verwendung von zwei Herstellungsverfahren her. Aus der Gesamtproduktion beider Firmen werde zufällig ein Teil entnommen. Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, X_3)$ enthält folgende Angaben:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \begin{cases} 1 & \text{Firma 1} \\ 2 & \text{Firma 2} \end{cases} \\
X_2 &= \begin{cases} 1 & \text{Verfahren 1} \\ 2 & \text{Verfahren 2} \end{cases} \\
X_3 &= \begin{cases} 0 & \text{Teil gut} \\ 1 & \text{Teil schlecht} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung an:

	Firma 1 ($X_1 = 1$)		Firma 2 ($X_1 = 2$)	
	Verfahren 1 ($X_2 = 1$)	Verfahren 2 ($X_2 = 2$)	Verfahren 1 ($X_2 = 1$)	Verfahren 2 ($X_2 = 2$)
Teil gut ($X_3 = 0$)	0.045	0.4	0.225	0.005
Teil schlecht ($X_3 = 1$)	0.005	0.05	0.225	0.045

Welches Verfahren schneidet insgesamt bzw. bei den einzelnen Firmen besser ab? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) \quad &, \quad P(X_3 = 1 \mid X_2 = 2) \\
P(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) \quad &, \quad P(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 2) \\
P(X_3 = 1 \mid X_1 = 2, X_2 = 1) \quad &, \quad P(X_3 = 1 \mid X_1 = 2, X_2 = 2)
\end{aligned}
$$

Interpretieren Sie das Ergebnis!

(b) Die folgende Tabelle enthält das Gesamtbruttoeinkommen, sowie die daraus gezahlte Einkommenssteuer der Jahre 1974 und 1978 in den USA, aufgeschlüsselt nach verschiedenen Einkommensklassen:

Jahreseinkommen (pro Person in US$)	Einkommen (in 1000 US$)	gezahlte Steuer (in 1000 US$)
1974		
$< 5\,000$	41 651 643	2 244 467
$5\,000 - 9\,999$	146 400 740	13 646 348
$10\,000 - 14\,999$	192 688 922	21 449 597
$15\,000 - 99\,999$	470 010 790	75 038 230
$\geq 100\,000$	29 427 152	11 311 672
1978		
$< 5\,000$	19 879 622	689 318
$5\,000 - 9\,999$	122 853 315	8 819 461
$10\,000 - 14\,999$	171 858 024	17 155 758
$15\,000 - 99\,999$	865 037 814	137 860 951
$\geq 100\,000$	62 806 159	24 051 698

Modellieren Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums, wobei Sie als Grundraum Ω die Menge aller 1974 und 1978 verdienter Dollar wählen. Weiterhin bezeichnen $K_1, \ldots, K_5$ die Ereignisse, dass ein zufällig ausgewählter Dollar zu einer der fünf Einkommensklassen K_j gehört, B das Ereignis, dass der Dollar 1974 verdient wurde und A das Ereignis, dass der Dollar als Einkommenssteuer abgeführt wurde. Berechnen Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) \quad &, \quad P(A \mid B^c) \\ P(A \mid B, K_j) \quad &, \quad j = 1 \ldots 5 \\ P(A \mid B^c, K_j) \quad &, \quad j = 1 \ldots 5 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S. 91ff)

(a)

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) &= \frac{0.23}{0.5} = 0.46 \\ P(X_3 = 1 \mid X_2 = 2) &= \frac{0.095}{0.5} = 0.19 \\ P(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) &= \frac{0.005}{0.05} = 0.1 \\ P(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 2) &= \frac{0.05}{0.45} = 0.\bar{1} \\ P(X_3 = 1 \mid X_1 = 2, X_2 = 1) &= \frac{0.225}{0.45} = 0.5 \\ P(X_3 = 1 \mid X_1 = 2, X_2 = 2) &= \frac{0.045}{0.05} = 0.9 \end{aligned}$$

Interpretation: Verfahren 2 scheint insgesamt gesehen besser zu sein. Bei den beiden Firmen schneidet es aber jeweils schlechter ab. Grund ist, dass Firma 2, bei der das Verfahren 2 sehr schlecht ist, hauptsächlich Verfahren 1 einsetzt, während Firma 1, bei der die Verfahren ähnlich gut funktionieren, Verfahren 2 bevorzugt.

(b) Insgesamt wurden 1974 880 179 247 US$ verdient und davon 123 690 314 US$ als Einkommenssteuer abgeführt. 1978 wurden insgesamt 1 242 434 934 US$ verdient und hiervon wiederum 188 577 186 US$ abgeführt. Hiermit können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten direkt aus der Tabelle abgelesen werden:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{123\,690\,314}{880\,179\,247} = 0.141 \\ P(A \mid B^c) &= \frac{188\,577\,186}{1\,242\,434\,934} = 0.152 \end{aligned}$$

Für die Steuersätze in den verschiedenen Einkommensklassen 1974 ergibt sich

$$P(A \mid B, K_j) = \begin{cases} 0.054 & j = 1 \\ 0.093 & j = 2 \\ 0.111 & j = 3 \\ 0.160 & j = 4 \\ 0.384 & j = 5 \end{cases}$$

während man für 1978 erhält:

$$P(A \mid B^c, K_j) = \begin{cases} 0.035 & j = 1 \\ 0.072 & j = 2 \\ 0.100 & j = 3 \\ 0.159 & j = 4 \\ 0.383 & j = 5 \end{cases}$$

Man erkennt, dass von 1974 nach 1978 die Einkommenssteuersätze in jeder Einkommensklasse gefallen sind, dass aber trotzdem die Durchschnittssteuerbelastung von 14.1% auf 15.2% gestiegen ist.

Bemerkung: Es sei $K_1, \ldots, K_n$ eine disjunkte Zerlegung eines Grundraums Ω und A, B zwei beliebige Eregnisse. Gelten die folgenden beiden Ungleichungen, so wird dieser Sachverhalt als Simpson-Paradoxon bezeichnet:

$$\begin{aligned} P(A \mid B, K_j) &> P(A \mid B^c, K_j) \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \\ P(A \mid B) &< P(A \mid B^c) \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Betrachtet wird eine Maschine mit exponentialverteilter Lebensdauer ($T \sim Exp(\lambda)$).

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Mindestlebensdauer von $a \in \mathbb{R}_+$ Zeiteinheiten? Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit für wachsende Parameterwerte λ?

(b) Berechnen und interpretieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P([0, t_0 + a] | [t_0, \infty))$ mit $a \geq 0$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus (a).

(c) Wie lautet die Dichte einer auf $[0, a]$ bzw. $[a, \infty]$ gestutzten Exponentialverteilung? Was fällt Ihnen bei der letztgenannten auf?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.64ff und S. 109ff)

Exponentialverteilung:

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(T \geq a) &= 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) \\ &= e^{-\lambda a} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt mit wachsendem λ ab.

(b)

$$P_T([0, t_0 + a]) \,|\, [t_0; \infty]) = P(T \leq t_0 + a \,|\, T \geq t_0) = \frac{P(T \leq t_0 + a \text{ und } T \geq t_0)}{P(T \geq t_0)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(T \in [t_0, t_0 + a])}{P(T \geq t_0} = \frac{F(t_0 + a) - F(t_0)}{1 - F(t_0)} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda t_0 - \lambda a} - 1 + e^{-\lambda t_0}}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda a} \\ &= P(T \leq a) \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine in den nächsten a Zeiteinheiten ausfällt, wenn sie bis zu einem Teitpunkt t_0 überlebt hat, mit der Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine in den ersten a Zeiteinheiten nach Inbetriebnahme ausfällt, übereinstimmt. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Exponentialverteilung auch als “Verteilung ohne Gedächtnis”.

(c) Auf ein Intervall I gestutzte Verteilung: Bedingte Verteilung einer Zufallsvariable X, unter der Bedingung $X \in I$, d.h. für $I = [a,b]$ ist

$$\tilde{F}(x) = P(X \leq x \,|\, X \in I) = \frac{P(X \leq x \text{ und } x \in I)}{P(X \in I)} \quad = \quad \begin{cases} P(\emptyset) & , \quad x < a \\ \dfrac{P(a \leq X \leq x)}{P(X \in I)} & , \quad a \leq x \leq b \\ \dfrac{P(X \in I)}{P(X \in I)} = 1 & , \quad b < x \end{cases}$$

bzw.

$$\tilde{F}(x) = P(X \leq x \,|\, X \in I) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & , \quad x \in [a,b] \\ 1 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$\tilde{f}(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(b) - F(a)} & , \quad x \in [a,b] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Mit den Angaben im Aufgabentext ergibt sich nun konkret:

$$\tilde{f}_{[0,a]}(t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda a}} & , \quad t \in [0,a] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und damit } \tilde{F}_{[0,a]}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda a}} & , \quad t \in [0,a] \\ 1 & , \quad t > a \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{[a,\infty)}(t) \quad = \quad \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-a)} & , \quad t \geq a \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und damit } \tilde{F}_{[a,\infty]}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 - e^{-\lambda(t-a)} & , \quad t \geq a \end{cases}$$

$\tilde{f}_{[a,\infty)}(t)$ entspricht einer um a nach rechts verschobenen Dichtefunktion einer Exponentialverteilung.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie für eine auf ein symmetrisches Intervall $[-c, c]$ gestutzte Normalverteilung $N(0; 1)$ die Dichtefunktion φ und die Verteilungsfunktion Φ, und stellen Sie diese graphisch dar.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S.91ff)

Es bezeichne $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ die Dichte der Standardnormalverteilung. Dann ergibt sich analog zu Aufgabe 10 (c) die Dichtefunktion der gestutzen Normalverteilung:

$$\tilde{\varphi}_{[-c,c]}(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{2\Phi(c) - 1} & , \quad x \in [-c, c] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. die Verteilungsfunktion der gestutzten Normalverteilung:

$$\tilde{\Phi}_{[-c,c]}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}_{[-c,c]}(t)dt \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \quad x < -c \\ \dfrac{\Phi(x) - \Phi(-c)}{2\Phi(c) - 1} & , \quad x \in [-c, c] \\ 1 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 12

Zur grafischen Darstellung des Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen A und B eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega), P)$ erstellen Sie folgende Zeichnung (siehe Abbildung 4):

Die eine Seite eines Quadrats mit der Kantenlänge 1 teilen Sie im Verhältnis $P(A) : 1-P(A)$ und teilen anschließend, entsprechend dieser Aufteilung, das Quadrat in zwei Streifen. An den beiden senkrecht dazu liegenden Seiten tragen Sie von oben die Strecken $P(B\,|\,A)$ und $P(B\,|\,\Omega\backslash A)$ ab und teilen anschließend die zu $P(A)$ bzw. $1 - P(A)$ gehörenden Streifen entsprechend.

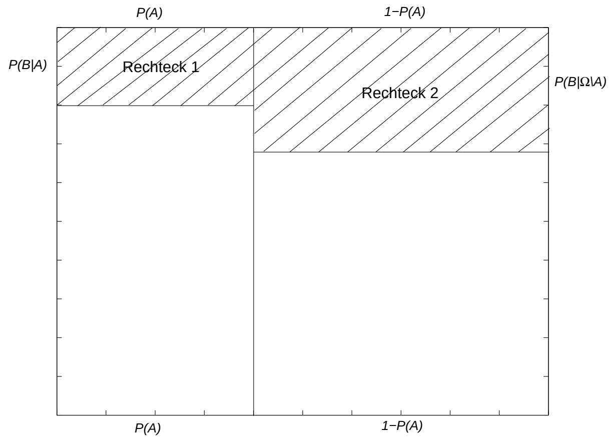


Abbildung 4: Skizze zu Aufgabe 12

(a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gerade $P(B)$ entspricht.

(b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B genau dann unabhängig sind, wenn die schraffierte Fläche ein Rechteck bildet.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie S.91ff)

(a) Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(B) &= \underbrace{P(B\,|\,A)\cdot P(A)}_{=\text{Fläche Rechteck 1}} + \underbrace{P(B\,|\,\Omega\backslash A)\cdot P(\Omega\backslash A)}_{=\text{Fläche Rechteck 2}} \\ &= \text{Fläche der schraffierten Fläche} \end{aligned}$$

(b)

"$\Rightarrow$" Seien die Ereignisse A und B unabhängig. Dann gilt für die Länge der vertikalen Kante von Rechteck 1:

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Aus der Unabhängigkeit von A und B ergibt sich unmittelbar die Unabhängigkeit von $\Omega\backslash A$ und B (wie?) und deshalb gilt für die Länge der vertikalen Kante von Rechteck 2:

$$P(B\,|\,\Omega\backslash A) = \frac{P(B\cap\Omega\backslash A)}{P(\Omega\backslash A)} = \frac{P(B)\cdot P(\Omega\backslash A)}{P(\Omega\backslash A)} = P(B)$$

Die beiden Kantenlängen stimmen somit überein und die schraffierte Fläche bildet folglich ein Rechteck.

"$\Leftarrow$" Falls die schraffierte Fläche ein Rechteck darstellt so stimmt ihr Flächeninhalt mit der Länge der vertikalen Kante also mit $P(B \mid A)$ überein. Außerdem stimmt der Flächeninhalt gemäß Teilaufgabe (a) aber mit $P(B)$ überein und deshalb gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B \cap A)$$

und somit sind die Ereignisse A und B unabhängig.

Aufgabe 13

(a) Zeigen sie, dass für die Verteilungsfunktion $F(x, y)$ einer zweidimensionalen Zufallsvariablen gilt:

   (i) F ist monoton steigend

   (ii) F ist in jeder der Variablen von rechts stetig.

   (iii)
   - $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(X, Y) = 1$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = 0$ für jedes y
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$ für jedes x

   (iv) Für alle $x_1 < x_2$ und alle $y_1 < y_2$ gilt:

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede Funktion mit den Eigenschaften (i)-(iv) Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen ist.

(b) Überprüfen Sie unter Benutzung von Teil (a), ob die Funktion

   (i)

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \geq 4 \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (ii)

$$F(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \min\{x, 1\} \cdot \min\{y, 1\} \quad \text{für} & x, y \geq 0 \\ & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen ist.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.129ff.)

(a) Die Verteilungsfunktion $F(x, y)$ einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) ist definiert als:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Nachweis der angegebenen Eigenschaften:

   (i) Monotonie: Sei $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \{X \leq x_2, Y \leq y_2\} \quad = \quad & \{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \ \cup \ \{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\} \ \cup \\ & \{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1\} \ \cup \ \{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \end{aligned}$$

   Dabei ist die Vereinigung disjunkt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(x_2, y_2) \quad = \quad & F(x_1, y_1) + P(\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\}) + \\ & + P(\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1\}) + P(\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}). \end{aligned}$$

   Da Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sind, folgt somit:

$$F(x_1, y_1) = P(X \leq x_1, Y \leq y_1) \leq P(X \leq x_2, Y \leq y_2) = F(x_2, y_2)$$

(ii) Rechtsstetigkeit: Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig aber fest und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \downarrow x_0$, dann gilt analog zum eindimensionalen Fall (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.44)

$$\{(x,y)|x > x_0, y > y_0\} = \{(x,y)|x > x_1, y > y_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(x,y)|x_i \geq x > x_{i+1}, y > y_0\}$$

und die Vereinigung ist disjunkt. Damit ist

$$\begin{aligned}
1 - F(x_0, y_0) &= P(X > x_0, Y > y_0) \\
&= P(X > x_1, Y > y_0) + \sum_{i=1}^{\infty}(P(x_i \geq X > x_{i+1}, Y > y_0) \\
&= 1 - F(x_1, y_0) + \sum_{i=1}^{\infty}(F(x_i, y_0) - F(x_{i+1}y_0)) \\
&= 1 - \lim_{i\to\infty} F(x_{i+1}, y_0)
\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.
Analoge Beweisführung in y.

(iii) Grenzwerte: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige Folgen mit $x_n \uparrow \infty$ bzw. $y_n \uparrow \infty$. Der Beweis der Behauptung

$$\lim_{n\to-\infty} F(x_n, y_n) = 1$$

erfolgt in zwei Schritten. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt, dann ist

$$\{(x,y)|y \leq y_0\} = \{(x,y)|x \leq x_1, y \leq y_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(x,y)|x_i < x \leq x_{i+1}, y \leq y_0\}$$

Damit gilt für die Randverteilung von Y

$$\begin{aligned}
F_Y(y_0) = P(Y \leq y_0) &= P(X \leq x_1, Y \leq y_0) + \sum_{i=1}^{\infty}(P(x_i < X \leq x_{i+1}, Y \leq y_0) \\
&= F(x_1, y_0) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(F(x_{i+1}, y_0) - F(x_i, y_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}, y_0)
\end{aligned}$$

Für die Randverteilung von Y gilt bekanntlich

$$\lim_{n\to\infty} F_Y(y_n) = 1$$

Damit ist

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} F(x_i, y_k) = 1$$

und mit

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = \lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty} F(x_i, y_k)$$

folgt die Behauptung.
Der Beweis für $\lim_{x\to-\infty} F(x,y)$ bzw. $\lim_{y\to-\infty} F(x,y)$ erfolgt analog zur Rechtsstetigkeit.

(iv) Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
& F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \\
= \; & F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - (F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)) \\
= \; & \underbrace{P(X \le x_2, Y \le y_2) - P(X \le x_1, Y \le y_2)}_{P(x_1 < X \le x_2, Y \le y_2)} - \underbrace{(P(X \le x_2, Y \le y_1) - P(X \le x_1, Y \le y_1))}_{P(x_1 < X \le x_2, Y \le y_1)} \\
= \; & P(x_1 < X \le x_2, Y \le y_2) - P(x_1 < X \le x_2, Y \le y_1) \\
= \; & P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) \ge 0
\end{aligned}
$$

(b) (i) Die Funktion F ist keine Verteilungsfunktion, da

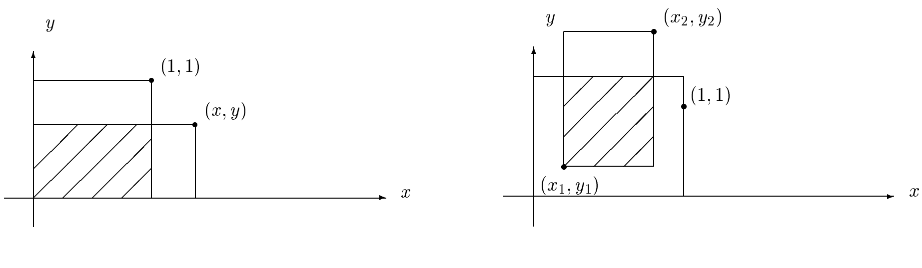
$$
\underbrace{F(2,2)}_{=1} - \underbrace{F(0,2)}_{=1} - \underbrace{F(2,0)}_{=1} + \underbrace{F(0,0)}_{=0} = -1 < 0
$$

d.h. die Bedingung (iv) aus Teilaufgabe (a) ist nicht erfüllt.

(ii) Es gilt:

$$
F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } y < 0 \\ x \cdot y & \text{für } 0 \le x, y \le 1 \\ x & \text{für } 0 \le x \le 1, y > 1 \\ y & \text{für } 0 \le y \le 1, x > 1 \\ 1 & \text{für } x, y > 1 \end{cases}
$$

Die Funktion F ist stetig und monoton, die Bedingung an die Grenzwerte ist auch erfüllt. Mit vielen Fallunterscheidungen lässt sich auch zeigen, dass die Bedingung (iv) erfüllt ist, d.h. F ist eine Verteilungsfunktion. $F(x,y)$ gibt den Flächeninhalt der Fläche im Einheitsquadrat an (siehe z.B. Abb. 3(a)), der südwestlich des Punktes (x,y) liegt. Die linke Seite der Ungleichung entspricht damit dem Flächeninhalt des Teils des Rechtecks beschrieben durch die Punkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2), der im Einheitsquadrat (siehe beispielhaft in Abb. 3(b)) liegt, und ist damit als Flächeninhalt nicht negativ.



(a) (b)

Abbildung 5: Verdeutlichung der Ungleichung

Aufgabe 14

Gegeben sei eine diskrete zweidimensionale Zufallsvariable $Y = (Y_1, Y_2)$ mit der Verteilung

(y_1, y_2)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,c)	(2,0)	(2,1)	(2,c)	(c,0)	(c,1)	(c, c)
$P((Y_1, Y_2) = (y_1, y_2))$	1/8	1/4	1/8	1/16	c^2	1/16	1/8	1/8	1/8

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Berechnen Sie die Randverteilungen.

(c) Wie groß ist $P(Y \leq (2, c))$?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.129ff., S.139ff.)

(a) Analog zu einer eindimensionalen Zufallsvariable muss gelten:

$$\sum_i \sum_j P(Y = (y_i, y_j)) \overset{!}{=} 1$$

Hieraus ergibt sich die Forderung:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot 2 + c^2 \\ &= 1 + c^2, \text{ also } c^2 = 0 \text{ bzw. } c = 0 \end{aligned}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet:

(y_1, y_2)	$(-1, 0)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$
$P(Y = (y_1, y_2))$	0.25	0.25	0.25	0.125	0.125	0

(b) Die Randverteilung einer diskreten Zufallsvariable $Z = (X, Y)$ ist:

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \text{ für alle } x_i \\ P(Y = y_i) &= \sum_j P(X = x_j, Y = y_i) \text{ für alle } y_i \end{aligned}$$

hier folgt mit $Y = (Y_1, Y_2)$:

y_1	-1	0	2
$P(Y_1 = y_1)$	0.5^*	0.375	0.125

bzw.

y_2	0	1
$P(Y_2 = y_2)$	0.625^{**}	0.375

wobei $^*P(Y = (-1, 0)) + P(Y = ((-1, 1))$ bzw. $^{**}P(Y = (-1, 0)) + P(Y = (2, 0)) + P(Y = (0, 0))$.

(c)

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq (2,0)) &= P(Y_1 \leq 2 \text{ und } Y_2 \leq 0) \\
&= P(Y = (-1,0)) + P(Y = (0,0)) + P(Y = (2,0)) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

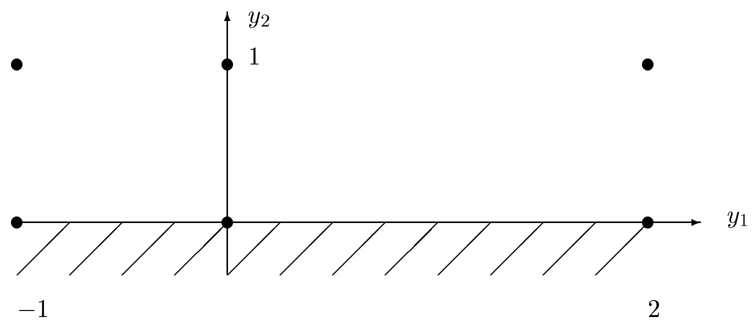


Abbildung 6: Veranschaulich der Berechnung in (c)

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} c(x^2+y^2) & -1 \le x,y \le 1 \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass φ Dichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) wird.

(b) Berechnen Sie die Randdichten $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(y)$.

(c) Bestimmen Sie die Höhenlinien.

(d) Berechnen Sie $F_{(X,Y)}(0,0.5)$, $E(X)$ und $E(Y \mid X = \frac{1}{2})$.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.129ff., S.139ff.,171ff.)

(a) Aus den Bedingungen an eine Dichtefunktion ergibt sich:

1. $\varphi(x,y) \ge 0$ für alle $x, y \ \Rightarrow \ c \ge 0$
2. $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} c(x^2+y^2)dxdy \\ &= c\int_{-1}^{+1} (\frac{1}{3}x^3 + xy^2)\Big|_{-1}^{+1} dy \\ &= \frac{2}{3}c\int_{-1}^{+1}(1+3y^2)dy \\ &= \frac{2}{3}c(y+y^3)\Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2}{3}c \cdot 4 \\ &\overset{!}{=} 1 \ \Rightarrow \ c = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(b) Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{+1} \frac{3}{8}(x^2+y^2)dy \\
&= \frac{3}{8}(yx^2+\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-1}^{+1} \\
&= \frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog ergibt sich

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y^2+\frac{1}{4} & \text{für} \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Die Definition für die Höhenlinie lautet: Menge aller Punkte$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\varphi(x,y)$ einen vorgegebenen Wert (Höhe) h annimmt. (Schnitt durch den Graphen der Dichtefunktion auf der Höhe h)

Sei $h > 0$. Da $\varphi(x,y) \leq 2c$ ist, ergeben nur Werte von $h \leq 2c = \frac{3}{4}$ Höhenlinien:

$$\begin{aligned}
h &= \varphi(x,y)) \\
&= \tfrac{3}{8}(x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 &= \tfrac{8}{3}h
\end{aligned}$$

d.h. die Höhenlinie wird durch die Gleichung $\frac{8}{3}h = x^2+y^2$ bzw. die Menge $\{(x,y)|x,y \in [-1,1] \text{ und } \frac{8}{3}h = x^2+y^2\}$ beschrieben. Die Höhenlinien sind hier Kreise (bzw. Kreisausschnitte durch die Einschränkung $x,y \in [-1,1]$, s. Abb) mit Mittelpunkt (0,0) und Radius $\sqrt{\frac{8}{3}h}$, wobei $0 \leq h \leq \frac{3}{4}$ ist, d.h. mit Radien zwischen 0 und $\sqrt{2}$.

(d)

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(0,0.5) &= \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-\infty}^{0.5} \varphi(x,y)dydx = \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{0}(x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-1}^{0.5} dx \\
&= \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{0}(1.5x^2+\frac{3}{8})dx = \frac{3}{8}(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x)\Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{21}{64} \ (= 0.328125)
\end{aligned}$$

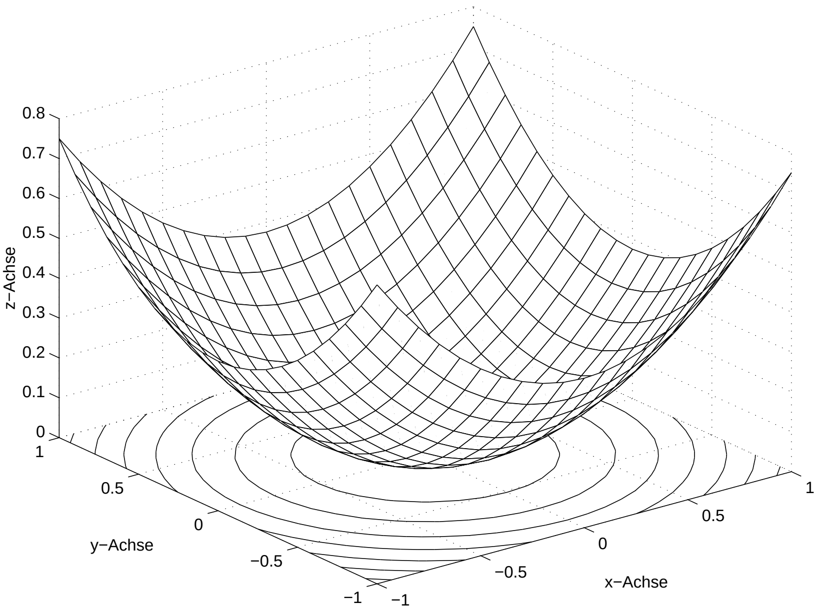


Abbildung 7: Skizze der Funktion φ mit ihren Höhenlinien zu Teilaufgabe (c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)dx = \int_{-1}^{1} (\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{4}x)dx \\ &= (\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^2)\Big|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

Für die bedingte Dichte gilt:

$$\varphi_{Y\,|\,X=\frac{1}{2}}(y) = \frac{\varphi(\frac{1}{2}, y)}{\varphi_1(\frac{1}{2})} = \begin{cases} \frac{3}{14} + \frac{6}{7}y^2 & \text{für} \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. der bedingte Erwartungswert berechnet sich gemäß:

$$\begin{aligned} E(Y\,|\,X = \frac{1}{2}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_{Y\,|\,X=\frac{1}{2}}(y)dy = \int_{-1}^{+1} (\frac{3}{14}y + \frac{6}{7}y^3)dy \\ &= (\frac{3}{28}y^2 + \frac{3}{14}y^4)\Big|_{-1}^{1} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 16

Eine Straßenbahn verkehrt zwischen den Haltestellen G und H. Die Schwarzfahrer unter den Fahrgästen sind zu 60% jugendlich und zu 40% erwachsen. Um diesen das Leben zu erschweren, werden alle Fahrgäste zwischen G und H zweimal kontrolliert, und zwar zuerst von Kontrolleur Nr. 1 und dann von Kontrolleur Nr. 2. Von Kontrolleur Nr.1 entdeckte Schwarzfahrer werden natürlich nicht noch einmal kontrolliert. Kontrolleur Nr. 1 entdeckt 60% der erwachsenen Schwarzfahrer und 40% der jugendlichen Schwarzfahrer. Kontrolleur Nr.2 entdeckt 50% der erwachsenen Schwarzfahrer und 50% der jugendlichen Schwarzfahrer, die vorher noch nicht von Kontrolleur Nr. 1 entdeckt wurden.

(a) Modellieren Sie das Kontrollverfahren durch einen Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer entdeckt wird ?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein entdeckter Schwarzfahrer jugendlich ist ?

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten weiterer Kombinationsmöglichkeiten

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.129ff.)

(a) Wahrscheinlichkeitsraum:

Grundgesamtheit: Menge aller Schwarzfahrer (betrachtet nach der Kontrolle)

$$\Omega = \{\omega \,|\, \omega \text{ Schwarzfahrer}\}$$

Mengensystem der Ereignisse: Potenzmenge von Ω (da Ω endlich ist):

$$A(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$$

Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0,1] \\ \omega &\mapsto P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}, \; N \text{ Anzahl der Schwarzfahrer, und somit} \\ A &\mapsto P(A) = \frac{\#A}{N} \end{aligned}$$

Es handelt sich um einen "Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum" mit der Menge der Schwarzfahrer als Grundgesamtheit.

Zur Differenzierung der Schwarzfahrer werden Zufallsvariablen X und Y eingeführt

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \text{ erwachsen} \\ 1 & \text{für } \omega \text{ jugendlich} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für Schwarzfahrer, entdeckt von Kontrolleur Nr. 1 } (K_1) \\ 2 & \text{für Schwarzfahrer, nicht entdeckt von Kontrolleur } K_1\text{, entdeckt von } K_2 \\ 3 & \text{für Schwarzfahrer nicht entdeckt} \end{cases}$$

Aus den Angaben ergibt sich:

$$P(X=0)=0.4,\ P(X=1)=0.6$$
$$P(Y=1\,|\,X=0)=0.6,\ P(Y=1\,|\,X=1)=0.4$$
$$P(Y=2\,|\,X=0)=0.4\cdot 0.5,\ P(Y=2\,|\,X=1)=0.6\cdot 0.5,$$
$$P(Y=3\,|\,X=0)=0.4\cdot 0.5,\ P(Y=3\,|\,X=1)=0.6\cdot 0.5$$

(b) Gesucht: P(Schwarzfahrer entdeckt)=1 − $P(Y=3)$

$P(Y=3)$ läßt sich zerlegen in die Wahrscheinlichkeit, dass ein erwachsener Schwarzfahrer nicht entdeckt wird, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein jugendlicher Schwarzfahrer nicht entdeckt wird:

$$\begin{aligned} P(Y=3) &= \underbrace{P(Y=3|X=0)}_{=0.4\cdot 0.5}\cdot\underbrace{P(X=0)}_{=0.4}+\underbrace{P(Y=3|X=1)}_{=0.6\cdot 0.5}\cdot\underbrace{P(X=1)}_{=0.6} \\ &= 0.08+0.18=0.26 \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich:

$$P(\text{Schwarzfahrer entdeckt})=0.74$$

Alternativ könnte die Wahrscheinlichkeit auch wie folgt berechnet werden:

$$P(\text{Schwarzfahrer entdeckt})=P(Y\in\{1,2\})=P(Y=1)+P(Y=2)$$

Für die einzelnen Summanden ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(Y=1\,|\,X=0)P(X=0)+P(Y=1\,|\,X=1)P(X=1) \\ &= 0.6\cdot 0.4+0.4\cdot 0.6=0.48 \\ P(Y=2) &= P(Y=2\,|\,X=0)P(X=0)+P(Y=2\,|\mathrm{X}=1)P(X=1) \\ &= 0.26 \text{ (analog zu } P(Y=3)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $P(Y=1)+P(Y=2)=0.74$

(c) Gesucht wird $P(X=1\,|\,Y\in\{1,2\})$

$$\begin{aligned} P(X=1\,|\,Y\in\{1,2\}) &= \frac{P(X=1,Y\in\{1,2\})}{P(Y\in\{1,2\})} \\ &= \frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)}{0.74} \\ &= \frac{P(Y=1\,|\,X=1)P(X=1)+P(Y=2\,|\,X=1)P(X=1)}{0.74} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.4+0.6\cdot 0.5\cdot 0.6}{0.74}=\frac{0.42}{0.74}=0.5676 \end{aligned}$$

(d) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X and Y ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} P(X=0,Y=1) &= P(Y=1\,|\,X=0)\cdot P(X=0) \\ &= 0.6\cdot 0.4=0.24 \end{aligned}$$

zu

$Y=$ / $X=$	1	2	3	$\sum$
0	0.24	0.08	0.08	0.4
1	0.24	0.18	0.18	0.6
$\sum$	0.48	0.26	0.26	1

Aufgabe 17

In einem Bahnhof steigen drei Reisende in einem Zug ein. Jeder von ihnen setzt sich zufällig in eines von drei Zugabteilen. Die Zufallsvariable N bezeichne die Anzahl der (von ihnen) besetzten Abteile, X_i $(i = 1, 2, 3)$ die Anzahl der Reisenden im i-ten Abteil.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von N und X_1 sowie von X_1 und X_2.

(b) Berechnen Sie $E(N)$, $E(X_1)$, $Var(N)$ und $Var(X_1)$.

(c) Sind N und X_1 bzw. X_1 und X_2 unabhängig?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.129ff., S.155ff., S.171ff.)

(a) **1.Weg:** Tabelle mit den möglichen Konstellationen (Es wird zwischen den 3 Reisenden unterschieden, d.h. es gibt 27 Möglichkeiten, wie sich die 3 Reisenden auf die Abteile verteilen können; jeder der Reisenden hat ja 3 Möglichkeiten. Jede der 27 Möglichkeiten hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{27}$.)

X_1	X_2	X_3	N	Anzahl Möglichkeiten
3	0	0	1	1
0	3	0	1	1
0	0	3	1	1
2	1	0	2	3
2	0	1	2	3
0	2	1	2	3
1	2	0	2	3
1	0	2	2	3
0	1	2	2	3
1	1	1	3	6
				$\sum = 27$

Man erhält somit folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_1 \ x_2	0	1	2	3	$\sum$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$\sum$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

bzw.

x_1 \ n	1	2	3	$\sum$
0	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{8}{27}$
1	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$
$\sum$	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	1

2. Weg: Multinomialverteilung: $Multinomial(n, p_1, \ldots, p_r)$

Die Multinomialverteilung beschreibt folgenden Zufallsvorgang: In einer Urne befinden sich Kugeln in den Farben $1, \ldots, r$, wobei $p_i \in [0,1]$ den Anteil der Kugeln mit Farbe i sei (Es gilt also $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$). Es wird eine Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang n gezogen. X_i sei die Anzahl der Kugeln der Farbe i. Dann ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von $(X_1, \ldots, X_r)$ gegeben durch:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) \quad =$$

$$\begin{cases} \binom{n}{x_1,\ldots,x_r} \cdot {p_1}^{x_1} \cdots {p_r}^{x_r} = \frac{n!}{x_1! \cdots x_r!} \cdot {p_1}^{x_1} \cdots {p_r}^{x_r} & \text{für} \quad \sum\limits_{i=1}^{r} x_i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $r = 2$ entspricht dies der Binomialverteilung.

Zur Aufgabe: Die Zufallsvariable (X_1, X_2, X_3) ist multinomialverteilt mit Parametern $(3; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, da jedes Abteil hier einer Farbe im Urnenmodell entspricht.

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) \quad = \quad \begin{cases} \frac{3!}{x_1! x_2! x_3!} \cdot (\frac{1}{3})^3 & \text{für} \quad \sum\limits_{i=1}^{3} x_i = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. wir erhalten die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

X_2 \ X_1	0	1	2	3	
0	$(\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$(\frac{1}{3})^3$	$(\frac{2}{3})^3$
1	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$6 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	0	$3 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^2$
2	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	0	0	$3 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})$
3	$(\frac{1}{3})^3$	0	0	0	$(\frac{1}{3})^3$
	$(\frac{2}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^2$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3})^3$	1

die einzelnen Komponenten erhält man z.B. gemäß:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 3) = \frac{3!}{0!0!3!} (\frac{1}{3})^0 (\frac{1}{3})^0 (\frac{1}{3})^3$$

X_1 / N	0	1	2	3	
1	$2 \cdot (\frac{1}{3})^3$	0	0	$(\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^3$
2	$2 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$6 \cdot (\frac{1}{3})^3$	$2 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3})^3$	0	$18 \cdot (\frac{1}{3})^3$
3	0	$6 \cdot (\frac{1}{3})^3$	0	0	$6 \cdot (\frac{1}{3})^3$
	$(\frac{2}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^2$	$3 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3})^3$	1

die einzelnen Komponenten erhält man z.B. gemäß:

$$P(X_1 = 0; N = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 3)$$

Bei den Randverteilungen von X_1, X_2, X_3 handelt es sich um Binomialverteilungen mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$.

(b) Der Erwartungswert berechnet sich aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$E(X_1) = 0 \cdot (\frac{2}{3})^3 + 1 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3})^2 + 2 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3}) + 3 \cdot (\frac{1}{3})^3 = 1$$

oder direkt aus dem Erwartungswert der Binomialverteilung.

$$E(N) = 1 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 2 \cdot 18 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 3 \cdot 6 \cdot (\frac{1}{3})^3 = \frac{57}{27} = \frac{19}{9}$$

$Var(N) = E(N^2) - [E(N)]^2$ mit

$$\begin{aligned} E(N^2) &= 1^2 \cdot 3 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 2^2 \cdot 18 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 3^2 \cdot 6 \cdot (\frac{1}{3})^3 \\ &= \frac{129}{27} = \frac{43}{9} \\ Var(N) &= \frac{43}{9} - (\frac{19}{9})^2 = \frac{26}{81} = 0.3209. \end{aligned}$$

und mit der Varianz der Binomialverteilung ergibt sich $Var(X_1) = \frac{2}{3}$. (Alternativ: $E(X_1^2) = \frac{5}{3}$)

(c) N und X_1 sind unabhängig, falls $P(N = n \text{ und } X_1 = x) = P(N = n) \cdot P(X_1 = x)$ für alle $x \in \{0, \ldots, 3\}$ und alle $n \in \{1, \ldots, 3\}$ ist.

Z.B. ist $P(N = 1, X_1 = 2) = 0 \neq \frac{3}{27} \cdot \frac{6}{27} = P(N = 1) \cdot P(X_1 = 2)$, d.h. N und X_1 sind nicht unabhängig.

Für X_1, X_2 gilt beispielsweise:

$$P(X_1 = 1 \text{ und } X_2 = 2) = \frac{3}{27} \neq \frac{12}{27} \cdot \frac{6}{27} = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 2),$$

d.h. X_1 und X_2 sind ebenfalls abhängig. (Da die Gesamtzahl der Reisenden auf 3 beschränkt ist, ändern sich durch Kenntnis der Anzahl der Personen in einem Abteil die möglichen Kombinationen für die anderen beiden Abteile.)

Aufgabe 18

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{für} \quad 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von (X, Y).

(c) Sind X und Y unabhängig ?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.139ff., S.155f.)

(a) Für $0 < x < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy \\ &= \int_0^1 (x+y)\, dy \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d.h.

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{für} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog ist für $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx \\ &= \int_0^1 (x+y)\, dy \\ &= y + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d.h.

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2} & \text{für} \quad y \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Wegen der Symmetrie von $f_{(X,Y)}(x,y)$ kann $f_Y(y)$ auch direkt aus $f_X(x)$ abgelesen werden.

(b) Folgende Bereiche sind zu betrachten:

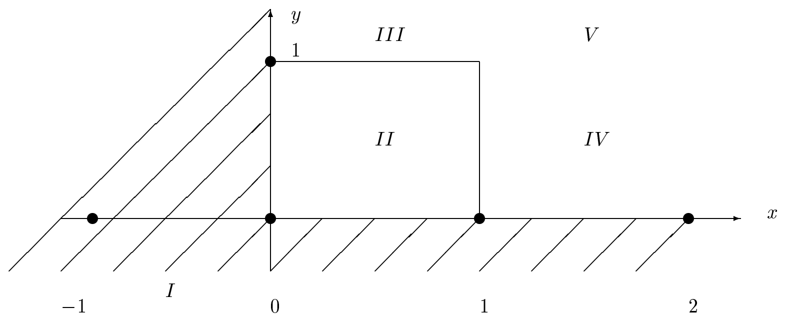


Abbildung 8: Definitionsbereiche der verschiedene Äste der Verteilungsfunktion

I: $x \leq 0$ oder $y \leq 0$:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 0$$

II: $x, y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_0^x \int_0^y (s+t)\ ds\ dt \\
&= \int_0^x st + \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^y ds \\
&= \int_0^x sy + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}ys^2 + \frac{1}{2}y^2 s \Big|_0^x \\
&= \frac{1}{2}yx^2 + \frac{1}{2}y^2 x = \frac{1}{2}xy(x+y)
\end{aligned}$$

III: $y > 1,\ x \in [0,1]$: (vergleiche Bereich II mit $y = 1$)

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^x s+t\ dt\ ds \\
&= \frac{1}{2}x(x+1)
\end{aligned}$$

IV: $x > 1,\ y \in [0,1]$: (vergleiche Bereich II mit $x = 1$)

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_0^y \int_0^1 s+t\ dt\ ds \\
&= \frac{1}{2}y(1+y)
\end{aligned}$$

V: $x, y > 1$: (vergleiche Bereich II mit $x = y = 1$)

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1$$

Damit erhält man:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \ y < 0 \\ \frac{1}{2}xy(x+y) & \text{für} \quad x, y \in [0,1] \\ \frac{1}{2}x(1+x) & \text{für} \quad x \in [0,1], \ y > 1 \\ \frac{1}{2}y(1+y) & \text{für} \quad y \in [0,1], \ x > 1 \\ 1 & \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Für $x, y \in [0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} f_X(x) \cdot f_Y(y) &= (x + \frac{1}{2}) \cdot (y + \frac{1}{2}) \\ &\neq x + y = f_{(X,Y)}(x,y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ X, Y sind somit abhängig.

Aufgabe 19

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) hat folgende Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.139ff., S.155f, S.171ff.)

(a) Für $1 \leq x \leq 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^{x-1} \frac{6}{5}x \; dy = \frac{6}{5}xy\bigg|_0^{x-1} \\ &= \frac{6}{5}x(x-1) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5}x. \end{aligned}$$

Für $0 \leq y \leq 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{y+1}^{2} \frac{6}{5}x \; dx = \frac{3}{5}x^2\bigg|_{y+1}^{2} \\ &= \frac{3}{5}(4-(y+1)^2) = \frac{3}{5}(-y^2-2y+3). \end{aligned}$$

Also ist :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x(x-1) & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(3-y^2-2y) & \text{für} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Beispielsweise gilt:

$$f_{(X,Y)}(1.5, 0.8) = 0 \neq f_X(1.5) \cdot f_Y(0.8) \qquad (f_X(1.5) > 0 \text{ und } f_Y(0.8) > 0),$$

d.h. X und Y sind abhängig.

(c) Die Momente ergeben sich gemäß:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \; = \; \frac{6}{5}\int\limits_{1}^{2}(x^3 - x^2)dx \; = \; 1.7 \\
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \; - (1.7)^2 \; = \; 2.94 - 2.89 = \; 0.05 \\
E(Y) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \; = \; \frac{3}{5} \int\limits_{0}^{1} y(-y^2 - 2y + 3)dy \; = \; \frac{7}{20} \\
Var(Y) &= \frac{3}{5} \int\limits_{0}^{1}(-y^4 - 2y^3 + 3y^2)dy - (\frac{7}{20})^2 \\
&= \frac{9}{50} - (\frac{7}{20})^2 \; = \; 0.0575
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20

Eine Münze wird n-mal geworfen. Beim einmaligen Werfen gilt:

$$P(\text{Zahl})=p \qquad P(\text{Wappen})=1-p$$

mit $0 < p < 1$. Man geht davon aus, dass die Ergebnisse bei den einzelnen Würfen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Beschreiben Sie den Zufallsvorgang "n-maliges Werfen" durch einen Zufallsvektor $X = (X_1 \dots X_n)$ (Verwenden Sie hierbei die Codierung: Wappen=0, Zahl=1). Geben Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 \dots, X_n$ an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Wie kann $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ interpretiert werden?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.161ff., S.182ff.)

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} \\
&= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}$$

Da das einmalige Werfen ein Bernoulliexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(\text{Zahl})$ ist, ergibt sich, dass die Zufallsvariable $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (=Anzahl "Zahl" bei $n-$maligem Werfen) binomialverteilt ist mit Parameter n, p.

Aufgabe 21

Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Für zwei beliebige diskrete Zufallsvariablen X und Y gilt: Hängt die bedingte Wahrscheinlichkeit von Y unter der Bedingung $X = x$ nicht von x ab, ist also für alle x übereinstimmend, so stimmt die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Randverteilung überein (die Umkehrung gilt offensichtlich auch).

(b) Für stetige Zufallsvariablen X und Y gilt die analoge Beziehung zwischen bedingter Dichte und Randdichte.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.139ff., S.152ff.)

(a) Formal lautet die Behauptung: Seien X,Y diskrete Zufallsvariablen mit $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n_1$, Werte von X und y_i, $i = 1, \ldots, n_2$, Werte von Y. Dann gilt:

Ist $P(Y = y_i|X = x_j) = P(Y = y_i|X = x_k)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n_2\}$ und alle x_j, x_k mit $j \neq k$, $j, k \in \{1, \ldots, n_1\}$, dann ist $P(Y = y_i|X = x_j) = P(Y = y_i)$, für jedes x_j, $j \in \{1, \ldots, n_2\}$ und alle $i \in \{1, \ldots, n_2\}$.

Der Beweis dazu: (analog zum Beweis zu Satz 8.9, Deskriptive Statistik)

$$
\begin{aligned}
P(Y = y_i) &= \sum_{j=1}^{n_1} P(Y = y_i, X = x_j) = \sum_{j=1}^{n_1} P(Y = y_i|X = x_j) \cdot P(X = x_j) \\
&= P(Y = y_i|X = x^*) \sum_{j=1}^{n_1} P(X = x_j) = P(Y = y_i \mid X = x^*).
\end{aligned}
$$

mit $x^* \in \{x_j|j = 1, \ldots, n_1\}$ beliebig (Verwendung des Bedingungsteil der Aussage).

(b) Die Behauptung lautet nun: X, Y seien stetige Zufallsvariablen mit $f_{Y|X=x}(y) = f_{Y|X=x'}(y)$ für alle $y, x, x' \in \mathbb{R}$, dann gilt $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ für jedes x.

Der Beweis dazu:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_x(x)} \cdot f_x(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot f_x(x)\, dx = f_{Y|X=x^*}(y) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, dx \\
&= f_{Y|X=x^*}(y).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 22

Sei (X, Y) eine zweidimensionale Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+y+xy) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

(b) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix von (X, Y).

(c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

(d) Sind X und Y unabhängig?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.171ff., S.155f.)

(a) Zur Berechnung der Erwartungswerte werden zuerst die Randdichten bestimmt. Für $0 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{4}(x+y+xy)dy \\ &= \frac{1}{4}(xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(2x+2+2x) = x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $0 \leq y \leq 2$ ist:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{4}\int_0^1 (x+y+xy)dx = \frac{1}{4}\,(\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}x^2y)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + y + \frac{1}{2}y) = \frac{3}{8}y + \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

d.h. die Randdichte von y lautet:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y + \frac{1}{8} & \text{für} \quad y \in [0,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Erwartungswerte ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = (\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2)\Big|_0^1 = \frac{7}{12} \\
E(Y) &= \int_0^2 y(\frac{3}{8}y+\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}(y^3+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{8}(8+2) = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

(b) Die Kovarianzmatrix lautet:

$$
C(X,Y) = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}
$$

Für die einzelnen Einträge ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2)-(E(X))^2 = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx - (\frac{7}{12})^2 \\
&= (\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3)\Big|_0^1 - (\frac{7}{12})^2 = \frac{5}{12}-\frac{49}{144} = \frac{11}{144} \\
Var(Y) &= E(Y^2)-(E(Y))^2 = \int_0^2 y^2(\frac{3}{8}y+\frac{1}{8})dy - (\frac{5}{4})^2 \\
&= \frac{1}{8}(\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^2 - (\frac{5}{4})^2 = \frac{1}{8}(12+\frac{8}{3}) - \frac{25}{16} = \frac{11}{6}-\frac{25}{16} = \frac{13}{48}
\end{aligned}
$$

Die Formel für die Kovarianz lautet:

$$
Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]
$$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{(X,Y)}(x,y)dydx = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^2 xy(x+y+xy)dydx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{3}x^2y^3)\Big|_0^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (2x^2+\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}x^2)dx \\
&= \frac{1}{4}(\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{9}x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\frac{12+24+16}{18}) = \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

somit erhält man:

$$
Cov(X,Y) = \frac{13}{18} - (\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{4}) = \frac{104}{144}-\frac{105}{144} = -\frac{1}{144}
$$

Damit ergibt sich die Kovarianzmatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{144} & -\frac{1}{144} \\ -\frac{1}{144} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$$

(c) Der Korrelationskoeffizient lautet:

$$\begin{aligned} \varrho_{X,Y} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\cdot\frac{13}{48}}} = -0.0483 \end{aligned}$$

(d) Es gilt: $\rho_{x,y} \neq 0$, d.h. X und Y sind abhängig. Analog zur deskriptiven Statistik gilt aber: X, Y unabhängig, dann $Cov(X,Y) = 0 = \varrho_{X,Y}$, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 23

(a) Bestimmen Sie für die Gleichverteilung über der Fläche $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die bedingte Verteilung $f(y|x_0)$ für ein beliebiges $x_0 \in [0,1)$. Wie sehen die Höhenlinien der bedingten Verteilung in Abhängigkeit von x_0 aus? Sind die beiden Komponenten eines Zufallsvektors mit Gleichverteilung über A unabhängig?

(b) Die Zufallsvariable T gebe einen entsprechend der Gleichverteilung zufällig aus dem Intervall $[0,\alpha]$, $\alpha > 0$, ausgewählten Punkt an. Von diesem Zufallsexperiment werden n unabhängige Wiederholungen gemacht (d.h. wir betrachten n unabhängige Realisationen der Zufallsvariablen T). Die Zufallsvariable X gebe an, wie oft dabei ein Wert aus einem fest vorgegebenen Teilintervall von $[0,\alpha]$ der Länge s gewählt wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.139ff., S.155f., S.161ff.)

(a) Sei (X,Y) eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Gleichverteilung über A. Die Fläche von A ist π, also ist die Dichte von (X,Y):

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_A(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für} \quad (x,y) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Randdichte von X an der Stelle x_0 lautet

$$f_X(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y)dy \cdot 1_{[-1,1]}(x_0) = \int_{-\sqrt{1-x_0^2}}^{\sqrt{1-x_0^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x_0^2}\ \mathbf{1}_{[-1,1]}(x_0).$$

Für $x_0 \in (-1,1)$ gilt damit:

$$\begin{aligned} f(y|x_0) &= \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{\frac{1}{\pi}\mathbf{1}_A(x_0,y)}{\frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[-\sqrt{1-x_0^2},\sqrt{1-x_0^2}]}(y)}{\frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x_0^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x_0^2}} & \text{für} \quad -\sqrt{1-x_0^2} \leq y \leq \sqrt{1-x_0^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die bedingte Verteilung ist ebenfalls eine Gleichverteilung. Die Höhenlinie entspricht der Dichtefunktion der Gleichverteilung über dem Intervall $-\sqrt{1-x_0^2} \leq y \leq \sqrt{1-x_0^2}$, d.h. für x_0 ist das Niveau $\frac{1}{2\sqrt{1-x_0^2}}$. $f_Y(y_0)$ entspricht aus Symmetriegründen $f_X(x_0)$. Damit ist $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ für $(x,y) \in A$. Die Zufallsvariablen sind folglich abhängig.

(b) Wenn (a,b) das Teilintervall der Länge s von $[0;\alpha]$ ist, in dem k von n Werten liegen sollen, dann gilt für T (einmalige Durchführung):

$$P(T \in (a,b)) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\alpha}b - \frac{1}{\alpha}a = \frac{b-a}{\alpha} = \frac{s}{\alpha},$$

d.h. die Zufallsvariable $\mathbf{1}_{\{T\in(a,b)\}}$ ist bernoulliverteilt mit $p = \frac{s}{\alpha}$. Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Werte im Intervall (a,b) bei $n-$facher unabhängiger Wiederholung angibt, ist binomialverteilt mit Parameter $p = \frac{s}{\alpha}$, d.h. mit $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\binom{n}{k}(\frac{s}{\alpha})^k(1-\frac{s}{\alpha})^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{s^k(\alpha-s)^{n-k}}{\alpha^n}$$

Aufgabe 24

Die Anzahl Y der Partikel, die eine Zählkammer in einer bestimmten Zeitspanne erreichen, ist poissonverteilt mit Parameter λ. Von den eintretenden Partikeln wird ein Spannungsstoss ausgelöst, der ein gewisses Vielfaches von Y beträgt. Der zufällig, aber unabhängig von Y erzeugte Multiplikator X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (x \geq 0)\ .$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die so entstehende Spannung kleiner als 1 ist.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.194ff.)

Die Poisson-Verteilung lautet: $P(Y=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spannungsstoß kleiner 1 ist, berechnet sich gemäß:

$$\begin{aligned}
P(X \cdot Y < 1) &= P[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{Y = h\} \cap \{X < \frac{1}{h}\} \cup \{Y = 0\}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k \text{ und } \ X < \frac{1}{k}) + P(Y = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \cdot P(X < \frac{1}{k}) + P(Y = 0).
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt aus der Tatsache, dass $P(X = 0) = 0$ gilt, da X stetig ist; die zweite aus der Unabhängigkeit von X und Y. Für den zweiten Faktor im letzten Ausdruck erhält man:

$$\begin{aligned}
P(X < \frac{1}{k}) &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{(1+x)^2} dx = (-\frac{1}{1+x})\Big|_0^{\frac{1}{k}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 - \frac{k}{k+1} \\
&= \frac{k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(X \cdot Y < 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \cdot \frac{1}{k+1} + P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} + e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 25

(a) Analog zu Aufgabe 20 sei der Ausgang eines Zufallsexperiments durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Das Zufallsexperiment wird ohne gegenseitige Beeinflussung n-mal wiederholt. Beschreiben Sie diesen Vorgang durch einen Zufallsvektor $Y = (Y_1 \ldots, Y_n)$ und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y, wenn die Verteilungsfunktion von X gegeben ist.

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion, wenn

(i) X poissonverteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$

(ii) X binomialverteilt ist mit m und p

(iii) X exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$

(iv) X normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Varianz σ^2

(c) Wie lautet in den Fällen (b)(i)-(iv) die Verteilungsfunktion von $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.161ff., S.182ff.)

(a) Sei F_X die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X. Dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit für die Verteilungsfunktion F_Y von $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ für $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F_Y(y_1, \ldots, y_n) = F_{Y_1}(y_1) \cdot \cdots \cdot F_{Y_n}(y_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(y_i)$$

(b) Für die angegebenen Verteilungen gilt nun:

(i)

$$F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} (\sum_{k=0}^{[y_i]} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda})$$

(ii)

$$F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} (\sum_{k=0}^{\min\{[y_i], m\}} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k})$$

(iii)

$$F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda y_i}) \cdot 1_{[0,\infty)}(y_i) = 1_{[0,\infty)}(\min\{y_i\}) \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda y_i})$$

(iv)

$$F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \Phi(\frac{y_i - \mu}{\sigma}) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

(c) (i) eine Summe von n unabhängigen identisch poissonverteilten Zufallsvariablen ist wieder poissonverteilt mit Parameter $n \cdot \lambda$, d.h. für die Verteilungsfunktion von $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ gilt:

$$F_Z(z) = \sum_{k=0}^{[z]} \frac{(n \cdot \lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

Für den Fall $n = 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= P(Y_1 + Y_2 = z) = P(\bigcup_{k=0}^{z} \{Y_1 = k\} \cap \{Y_2 \leq z - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{z} P(\{Y_1 = k\} \cap \{Y_2 = z - k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{z} P(Y_1 = k) \cdot P(Y_2 = z - k) \\
&= \sum_{k=0}^{z} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{z-k}}{(z-k)!} e^{-\lambda} \\
&= (\sum_{k=0}^{z} \frac{\lambda^z}{k!(z-k)!}) \cdot e^{-2\lambda} \\
&= \underbrace{(\sum_{k=0}^{z} \frac{z!}{k!(z-k)!})}_{=2^z} \cdot \frac{\lambda^z}{z!} e^{-2\lambda} \\
&= 2^z \cdot \frac{\lambda^z}{z!} \cdot e^{-2\lambda} = \frac{(2\lambda)^z}{z!} \cdot e^{-2\lambda}, \text{ mit } z \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$F_Z(z) = \sum_{k=0}^{[z]} P(Z = z) = \sum_{k=0}^{[z]} \frac{(2\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-2\lambda} \text{für } z \in \mathbb{R}$$

(ii) Eine Summe von n unabhängigen identisch $B(m, p)$-verteilten Zufallsvariablen ist wieder binomialverteilt mit Parametern $n \cdot m$ und p, d.h. für die Verteilungsfunktion von $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ gilt:

$$F_Z(z) = \sum_{k=0}^{\min\{z, n \cdot m\}} \binom{n \cdot m}{k} p^k (1-p)^{n \cdot m - k}$$

(iii) <u>Behauptung</u>:

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Z := Y_1 + \ldots + Y_n$, wobei $Y_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ besitzt die Form

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda z)^k}{k!} & \text{für } z > 0 \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Die Verteilungsfunktion F_Z besitzt genau dann die angegebene Form, wenn

die Dichte f_Z die folgende Form hat (Produktregel!):

$$f_Z(z) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \leq 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} & \text{für} \quad z > 0 \end{cases}$$

Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass die Dichte f_n einer Summe von n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängigen identisch exponentialverteilter Zufallsvariablen genau diese Gestalt besitzt.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$f_1(x) = \frac{\lambda^1}{0!} x^0 \cdot e^{-\lambda x} \cdot 1_{(0,\infty)}(x) \quad = \quad \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Induktionsannahme: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

dann gilt für f_{n+1} (für $x > 0$) : (Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_1(x-t) dt = \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt \\ &= \quad \lambda^{n+1} e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Dies vollendet den Beweis.

(iv) Eine Summe von n unabhängigen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt mit Mittelwert $n \cdot \mu$ und Varianz $n \cdot \sigma^2$, d.h. die Verteilungsfunktion von $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ lautet:

$$F_Z(z) \quad = \quad \Phi\left(\frac{z - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} e^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}} dx$$

Aufgabe 26

Veranschaulichen Sie sich den Begriff *Faltung* anhand der beiden unabhängigen diskreten Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$X = x$	1	2	3
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.5

$Y = y$	-1	0	1
$P(Y = y)$	0.3	0.4	0.3

Was ändert sich, wenn X und Y stetige Zufallsvariablen sind?

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.182ff.)

Sei (X, Y) eine zweidimensionale Zufallsvariable (X Zufallsvariable auf $(\Omega_1, A(\Omega_1), P_1)$, Y Zufallsvariable auf $(\Omega_2, A(\Omega_2), P_2)$). Die Summe $Z = X + Y$ ist ebenfalls eine Zufallsvariable, die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, A(\Omega_1 \times \Omega_2), P_1 \times P_2)$[1] definiert ist.

Anschaulich:

Die Punktmenge (X, Y diskret) bzw. Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (X, Y stetig) wird durch die Bildung der Summe $Z = X + Y$ so zusammengefaltet, dass alle Kombinationen (x, y) von Werten der Zufallsvariable (X, Y), deren Summe identisch ist, zusammengefasst werden (s.Abb.). Die Wahrscheinlichkeit für $Z = z$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, eine Kombination (x, y) aus der Menge der Werte (x, y) mit $x + y = z$ zu erhalten, d.h. für diskrete X, Y:

$$P(Z = z) \;=\; \sum_{(x,y):x+y=z} P(X = x,\ Y = y)$$

und bei Unabhängigkeit

$$P(Z = z) = \sum_{(x,y):x+y=z} P(X = x)P(Y = y)$$

$Z = X + Y$ kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Dabei ist

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1)P(Y = -1) \\
&= 0.3 \cdot 0.3 = 0.09 \\
P(Z = 1) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = -1) \\
&= 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.12 + 0.06 = 0.18 \\
P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = -1) \\
&= 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.09 + 0.08 + 0.15 = 0.32 \\
P(Z = 3) &= P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) \\
&= 0.2 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.06 + 0.2 = 0.26 \\
P(Z = 4) &= P(X = 3, Y = 1) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15
\end{aligned}$$

[1] $A(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ist die von $A(\Omega_1) \times A(\Omega_2)$ erzeugte $\sigma-$Algebra, d.h. die kleinste $\sigma-$Algebra, die $A(\Omega_1) \times A(\Omega_2)$ als Teilmenge enthält.

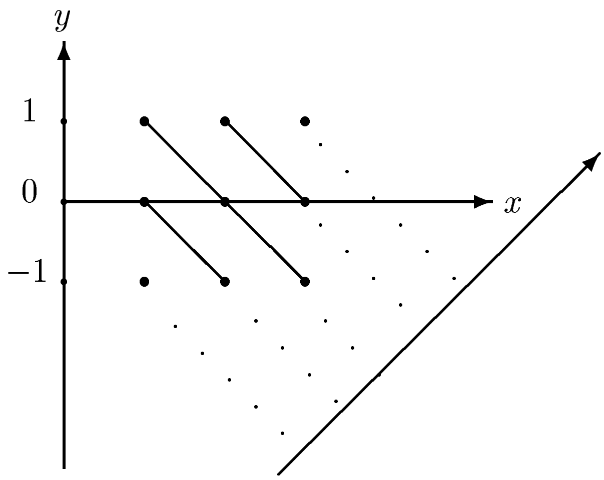


Abbildung 9: Veranschaulichung des "Faltungsprozesses"

Für stetige Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx$$

bzw. bei Unabhängigkeit von X und Y:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\ dx.$$

Die Verteilungsfunktion erhält man durch

$$F_Z(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\alpha} f_Z(z)dz.$$

Aufgabe 27

Die Lebensdauer von einer Anlage sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1 > 0$. Bei Ausfall der Anlage wird automatisch und ohne zeitliche Verzögerung ein Notaggregat eingesetzt, dessen Lebensdauer unabhängig von der Lebensdauer der Anlage und ebenfalls exponentialverteilt ist mit einem Parameter λ_2 mit $0 < \lambda_2 \leq \lambda_1$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Gesamtlebensdauer des Systems.

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion im Spezialfall $\lambda_2 = \lambda_1$?

(c) Unter der Voraussetzung, dass $\lambda_1 = 2\lambda_2$ ist, ist λ_1 so zu bestimmen, dass eine Gesamtlebensdauer des Systems von mindestens 1000 Zeiteinheiten mit 90% Wahrscheinlichkeit garantiert werden kann.

Lösung: (Wahrscheinlichkeitstheorie, S.182ff.)

Sei X_1 die Zufallsvariable, die die Lebensdauer der Anlage modelliert und X_2 die Zufallsvariable, die die Lebensdauer des Notaggregats beschreibt, dann gilt:

$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ bzw. $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$

(a) Gesucht ist die Verteilung der Gesamtlebensdauer, d.h. die Verteilung der Zufallsvariablen $Y = X_1 + X_2$. Mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 26 ergibt sich für die Dichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariablen Y für $y \geq 0$, wobei $\lambda_2 < \lambda_1$:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(y-x)} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_2 x} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\min\{x, y-x\})dx \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(-\lambda_1+\lambda_2)x} dx \quad (*) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \right) \Big|_0^y \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 y} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 y} \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y})
\end{aligned}$$

d.h. die Verteilungsfunktion ergibt sich gemäß:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_0^y \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})dt \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\right)\Bigg|_0^y \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 y} + \frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 y} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 y} - \frac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 y} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right) \\
&= 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 y} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 y}
\end{aligned}$$

(b) Für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ergibt sich aus $(*)$ $(\int_0^y dx = y)$:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) \\
\text{bzw. } F_Y(y) &= \int_0^y \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = -\lambda t e^{-\lambda t}\Big|_0^y + \int_0^y \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= -\lambda y e^{-\lambda y} - e^{-\lambda t}\Big|_0^y = -\lambda y e^{-\lambda y} - e^{-\lambda y} + 1 \\
&= 1 - (\lambda y + 1)e^{-\lambda y} = 1 - e^{-\lambda y}(1 + \lambda y)
\end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um die Erlang-Verteilung mit Stufenzahl 2.

(c) Ansatz:

$$\begin{aligned}
P[Y \geq 1000] &\geq 0,9 \\
\Leftrightarrow 1 - P[Y < 1000] &\geq 0,9 \\
\Leftrightarrow P[Y < 1000] &\leq 0,1 \\
F_Z(1000) &\leq 0,1 \Rightarrow \text{ Hinreichend } F_Z(1000) = 0,1, \text{ mit } \lambda_1 = 2\lambda_2
\end{aligned}$$

d.h.:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 - 2\lambda_2}e^{-\lambda_2 \cdot 1000} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 2\lambda_2}e^{-2\lambda_2 \cdot 1000} &= 0.1 \\
\Longleftrightarrow 0.9 - 2e^{-1000\cdot\lambda_2} + e^{-2000\cdot\lambda_2} &= 0 \\
\overset{z := e^{-1000\cdot\lambda_2}}{\Longleftrightarrow} z^2 - 2z + 0.9 &= 0 \\
\Longleftrightarrow z_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{0.1}.
\end{aligned}$$

$z_1 = 1 + \sqrt{0.1} = e^{-1000\lambda_2}$ ergibt ein negatives λ_2, also keine Lösung, d.h

$$\lambda_2 = -\frac{\ln z}{1000} = -\frac{\ln(1-\sqrt{0.1})}{1000} = 0.00038,$$

also $\lambda_1 \approx 0.00076$.