Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel IX - Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Häufig: Beobachtung mehrerer zufallsbehafteter Größen

Beispiele:

- Mehrere Aktienindices (z.B. Dax, Dow Jones, Nikkei)
- Wechselkurs und Aktienindex
- Anzahl der Sonneneruptionen und Konjunkturdaten

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Häufig: Beobachtung mehrerer zufallsbehafteter Größen

Beispiele:

- Körpergröße und Körpergewicht einer zufälligen aus der Population herausgegriffenen Person
- Genstruktur und Krankheitsgeschichte
- Medikamentöse Behandlung und Krankheitsverlauf (gemessen durch verschiedene Größen)

  . . .

Wichtig für die induktive Statistik: "Stichprobe vom Umfang n"

Wiederholte Durchführung eines Zufallsvorganges (Experiments) unter gleichen Bedingungen.

n Durchführungen: n Beobachtungswerte

Formale Darstellung bei *einer* zufallsbehafteteten Größe

- Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeit des Zufallsvorgangs
- Zufallsvariable zur Darstellung des Beobachtungswerts bei der Durchführung des Zufallsvorgangs

Formale Darstellung bei *mehreren* zufallsbehafteten Größen

Zielsetzung:

- Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeit sämtlicher Zufallseinflüsse
- Mehrere Zufallsvariablen auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum zur Darstellung der Beobachtungswerte bei Durchführung des Zufallsgeschehens.

Damit:
Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_k$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$

$$X_1, \dots, X_k \quad : \quad \Omega \to \mathbb{R}$$

Bemerkung:
Gemeinsame Untersuchung der Zufallsvariablen ist nur möglich, wenn sie auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind (d.h. von demselben Zufallsprozess abhängen)

$X_1, \ldots, X_k$ können zu einem Vektor zusammengefasst werden:

$X_i : \Omega \to \mathbb{R}$,	$X_i(\omega)$ Funktionswert an der Stelle ω.
$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$	Vektor der Funktionswerte an der Stelle ω (beim Ablauf ω)
$X : \Omega \to \mathbb{R}^k$	<u>k-dimensionale Zufallsvariable</u> ("Zufallsvektor")

Eine eindimensionale Zufallsvariable Y liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_Y auf $\mathbb{R}$.

$$B \subset \mathbb{R}: \quad P_Y(B) = P(\{\omega | Y(\omega) \in B\}) = P(Y^{-1}(B)) = P(\text{“}Y \in B\text{“})$$

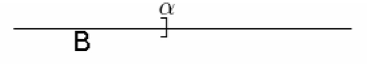
Analog:

Eine k-dimensionale Zufallsvariable (“Zufallsvektor”) liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}
B & \qquad \text{Borelsche Teilmenge des } \mathbb{R}^k \\
X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \\
& \qquad \text{“Urbildmenge von } B \text{ bei } X\text{”} \\
P_X(B) &= P(X^{-1}(B)) = P(\text{“}X \in B\text{“}) \\
& \qquad \text{Wahrscheinlichkeit für einen Wert der ZV } X \text{ in } B.
\end{aligned}$$

Spezielle Wahl von B führt zur Verteilungsfunktion:

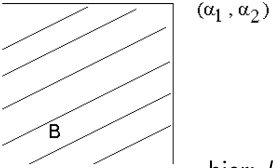
eindimensional: $B = (-\infty, \alpha]$



$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \leq \alpha) = F_X(\alpha)$$

$\underline{k\text{-dimensional}}$: $\quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} B &= \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k | x_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}. \\ P_X(B) &= P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega | X_i(\omega) \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}) \\ &= P(X_1 \leq \alpha_1, \ldots, X_k \leq \alpha_k) = P(X \leq \alpha) \\ &= F_{X_1, \ldots, X_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = F_X(\alpha) \end{aligned}$$



hier: $k = 2$

Die Verteilungsfunktion F_X beschreibt das Wahrscheinlichkeitsmaß P_X vollständig.

Aber:

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Verteilungsfunktion ist mühsamer als im eindimensionalen Fall.

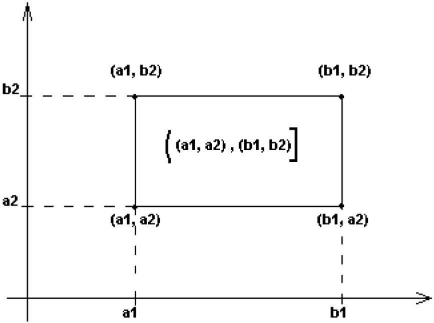
Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion

Sei $X: \ (\Omega, A(\Omega), P) \ \to \mathbb{R}^2$ zweidimensionale Zufallsvariable $(k = 2)$ mit Verteilungsfunktion F.

Beispiel:

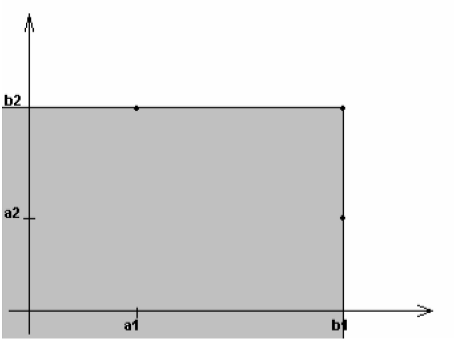
$$B = ((a_1, a_2), (b_1, b_2)] = \{(x_1, x_2) | a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2\}$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion



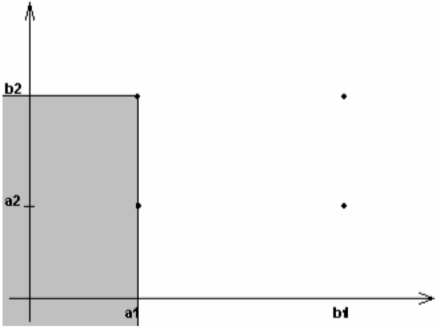
$$P\left(\left((a_1, a_2), (b_1, b_2)\right]\right)$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion



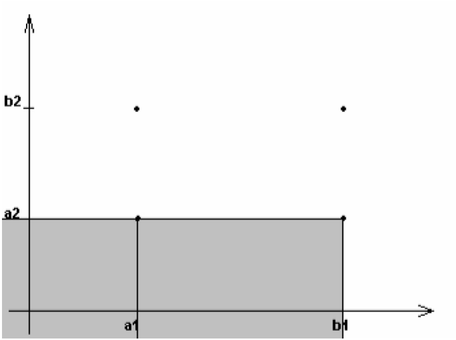
$$P((-\infty, (b_1, b_2)])$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion



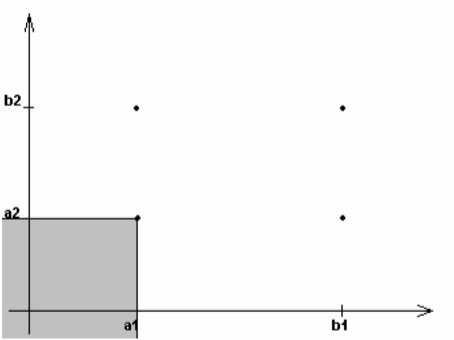
$$P((-\infty,(a_1,b_2)])$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion



$$P((-\infty,(b_1,a_2)])$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeiten aus Verteilungsfunktion



$$P((-\infty, (a_1, a_2)])$$

Rechnerisch:

$$\begin{aligned} P_X(((a_1, a_2), (b_1, b_2)]) &= P((-\infty, (b_1, b_2)]) - P(-\infty, (a_1, b_2)]) \\ &\quad - P(-\infty, (b_1, a_2)]) + P(-\infty, (a_1, a_2)]) \\ &= F((b_1, b_2)) - F((a_1, b_2)) \\ &\quad - F((b_1, a_2)) + F((a_1, a_2)) \end{aligned}$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

1.) $F(x) \geq 0$

2.) F ist monoton

3.) $\alpha_i \to -\infty$ für jedes $i = 1, \ldots, k \Rightarrow F_X(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \to 0$

$\alpha_i \to +\infty$ für jedes $i = 1, \ldots, k \Rightarrow F_X(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \to 1$

4.) F ist von oben stetig, d.h.

$\alpha_n \geq \alpha(\alpha_{n,i} \geq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, k)$

$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow F(\alpha_n) \longrightarrow F(\alpha)$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Diese Eigenschaften sind **notwendig**, aber **nicht hinreichend**:

Sei F eine Funktion mit

$$F(b_1, b_2) = F(a_1, b_2) = F(b_1, a_2) = 1$$

und

$$F(a_1, a_2) = 0,$$

so ist

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = -1 \quad .$$

F ist also keine Verteilungsfunktion, kann aber **1.) - 4.)** erfüllen.

X **diskret:**

Es gibt endlich oder abzählbar unendlich viele Werte von X:

$$x^i \in \mathbb{R}^k, i \in I, x^i \neq x^j \text{ für } i \neq j,$$

$$P(x^i) = p_i > 0 \text{ und } \sum_{i \in I} p_i = 1$$

Eine k-dimensionale ZV ist diskret, wenn jede Komponente x_i von X diskret ist.

Beispiel 9.7: Wochenproduktion

Wir betrachten die Gesamtproduktion an den Wochentagen $Mo, Di, \ldots$ eines Konsumartikels einer Firma über einen bestimmten Zeitraum. Sei Ω wie oben das Laplace-Experiment mit der Menge aller produzierten Exemplare als Grundgesamtheit.

Sei $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \text{ wurde am } & \mathit{Mo} & \text{produziert} \\ 2 & \omega \text{ wurde am } & \mathit{Di} & \text{produziert} \\ 3 & \omega \text{ wurde am } & \mathit{Mi} & \text{produziert} \\ 4 & \omega \text{ wurde am } & \mathit{Do} & \text{produziert} \\ 5 & \omega \text{ wurde am } & \mathit{Fr} & \text{produziert} \end{cases}$$

und $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \text{ ist in Ordnung} \\ \\ 1 & \omega \text{ ist Ausschuss.} \end{cases}$$

X **stetig:** Es gibt eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha_k} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\alpha_1} f(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k$$

f mit $(*)$ heißt Dichtefunktion von X, wenn

1.) $f(x_1, \ldots, x_k) \geq 0$

2.) $\left.\frac{\partial^k F}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_k}\right|_{\alpha} = f(\alpha)$, wenn die linke Seite existiert.

Wegen der Gesamtwahrscheinlichkeit 1 muss für eine Dichte gelten (notwendige Bedingung):

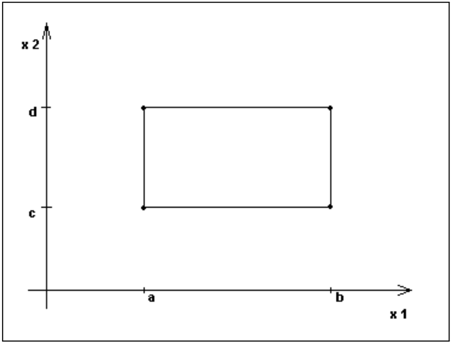
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 1$$

Bemerkung: Wenn einige der Komponenen diskret und die übrigen stetig sind, ist X weder diskret noch stetig. (Kombination von diskreten und stetigen Zufallsvariablen.)

Beispiele für 2-dimensionale stetige Zufallsvariablen

1.) Gleichverteilung auf einem Rechteck:

Gegeben sei ein Rechteck mit den Koordinaten
$(a, c), (b, c), (a, d), (b, d)$



Als Dichtefunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verwenden wir analog zur eindimensionalen Gleichverteilung

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} C & a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei C noch geeignet zu bestimmen ist.

Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 dx_1 = 1$$

gelten muss, ergibt sich für C die Forderung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 dx_1 = \int_a^b C(d-c)dx_1 = C(d-c)(b-a).$$

Damit ist $C = \frac{1}{(d-c)(b-a)}$, also der Kehrwert des Flächeninhalts des Rechtecks.

Man erhält damit

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \frac{1}{(d-c)(b-a)} \cdot (\alpha_1 - a)(\alpha_2 - c) & a \leq \alpha_1 \leq b, c \leq \alpha_2 \leq d \\ \frac{1}{b-a}(\alpha_1 - a) & a \leq \alpha_1 \leq b, d \leq \alpha_2 \\ \frac{1}{d-c}(\alpha_2 - c) & b \leq \alpha_1, c \leq \alpha_2 \leq d \\ 1 & b \leq \alpha_1, d \leq \alpha_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.) $X = (X_1, X_2)$ habe die Dichte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{q(x_1,x_2)}{2}}$$

mit

$$q(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

Dabei sind $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+,\ \rho \in (-1, 1)$ Parameter, durch die die Gestalt der Dichte variiert werden kann. Die Wahrscheinlich- keitsverteilung, die durch diese Dichte festgelegt ist, heißt **bivariate Normalverteilung.**

Diese Dichte kann dadurch graphisch veranschaulicht werden, dass man die Funktion dreidimensional darstellt oder dass man "Höhenlinien" wie in einer geographischen Karte wiedergibt.

Eine Höhenlinie verbindet die Punkte (x_1, x_2) mit übereinstimmender Höhe $c : c = f(x_1, x_2)$.

$f(x_1, x_2) = c$ ist damit gleichwertig mit $q(x_1, x_2) = c'$; die dadurch festgelegte geometrische Figur ist eine Ellipse, man erhält also als Höhenlinien eine Schar von Ellipsen mit übereinstimmenden Hauptachsen.

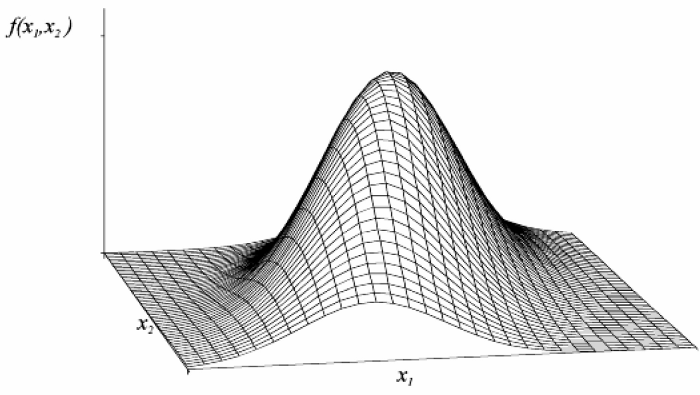


Abbildung: Dichtegebirge einer bivariaten Normalverteilung mit
$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, \rho = 0,5.$

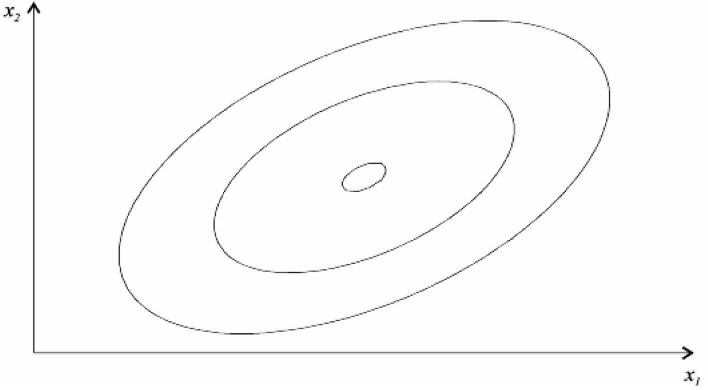


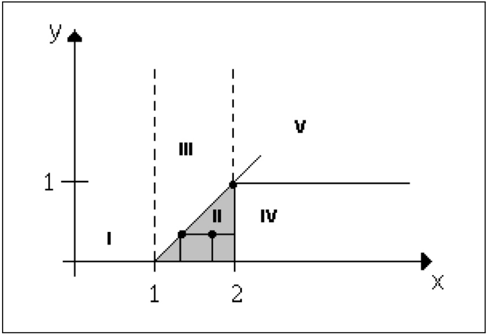
Abbildung: Höhenliniendiagramm zu obiger bivariater Normalverteilung.

Übungsaufgabe

$X = (X_1, X_2)$ habe die **Dichte**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & 1 \leq x \leq 2 \quad 0 < y \leq x-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie lautet die **Verteilungsfunktion**?



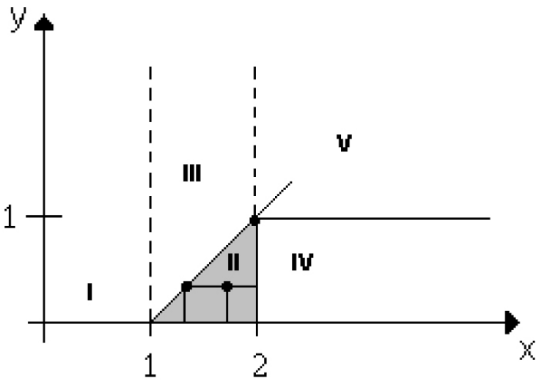
$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\alpha_1} f(x, y) dx dy$$

In I: $F(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad$ (I: $\alpha_1 \leq 1$ oder $\alpha_2 \leq 0$)

In II: $1 \leq \alpha_1 \leq 2,\ 0 < \alpha_2 \leq \alpha_1 - 1$

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{-\infty}^{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\alpha_1} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{\alpha_2} \int_{y+1}^{\alpha_1} \frac{6}{5}xdxdy \\ &= \int_{0}^{\alpha_2} \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_{y+1}^{\alpha_1} \right) dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^{\alpha_2} \left(\frac{3}{5}\alpha_1^2 - \frac{3}{5}(y+1)^2 \right) dy \\
&= \int\limits_0^{\alpha_2} \left(\frac{3}{5}\alpha_1^2 - \frac{3}{5}y^2 - \frac{6}{5}y - \frac{3}{5} \right) dy \\
&= \frac{3}{5}\alpha_1^2\alpha_2 - \frac{3}{5}\frac{\alpha_2^3}{3} - \frac{6}{5}\frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{3}{5}\alpha_2 \\
&= \frac{3}{5}\alpha_1^2\alpha_2 - \frac{1}{5}\alpha_2^3 - \frac{3}{5}\alpha_2^2 - \frac{3}{5}\alpha_2 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

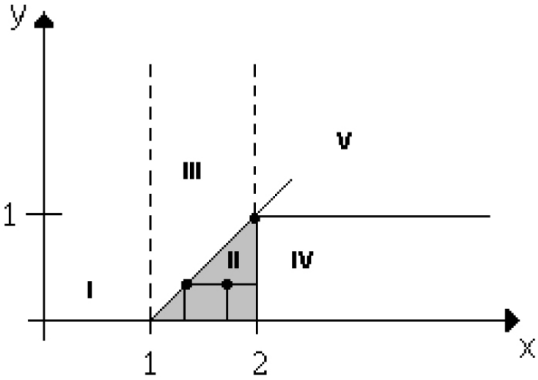

y
1
x
1
2
I
II
III
IV
V

In III: $1 \leq \alpha_1 \leq 2,\ \alpha_1 - 1 < \alpha_2$

$\alpha_2 = \alpha_1 - 1$ einsetzen in $(*)$ ergibt

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2}{5}\alpha_1^3 - \frac{3}{5}\alpha_1^2 + \frac{1}{5}$$

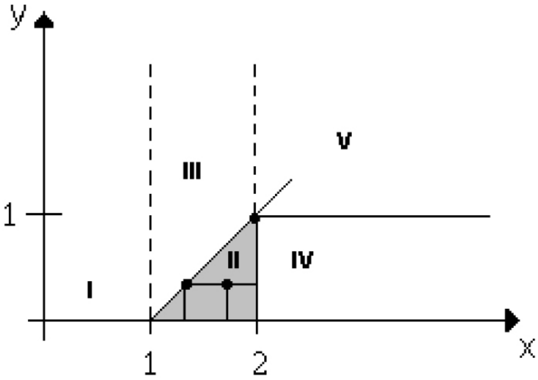
Notiz: für Werte $x_2 > \alpha_1 - 1$: Dichte $= 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 - 1$ setzen


y
1
I
II
III
IV
V
1
2
x

In IV: $2 < \alpha_1,\ \alpha_2 < 1$

$\alpha_1 = 2$ einsetzen in $(*)$ ergibt

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{5}\alpha_2^3 - \frac{3}{5}\alpha_2^2 + \frac{9}{5}\alpha_2$$


y
1
I
III
II
IV
V
1
2
x

In V: $2 < \alpha_1, 1 < \alpha_2$

$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$ einsetzen

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{12}{5} - \frac{7}{5} = 1$$

Fragen

- Wie lautet die Verteilung(-sfunktion) der Zufallsvariable separat betrachtet ?
- Wie beeinflusst ein fixierter Wert bei einer Komponente die Verteilung der übrigen ?
- Gibt es einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhang zwischen den Komponenten des Zufallsvektors ?