Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel VIII - Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit von Ereignissen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Beispiel 1: Montagsauto

Nach weit verbreiteter Meinung ist ein montags gefertigtes Produkt (z.B. Auto) eher (*mit größerer Wahrscheinlichkeit*) mit Produktionsmängeln behaftet.

Formale Darstellung:

Ω	- Menge der produzierten Autos
$Mo \subset \Omega$	- Menge der montags produzierten Autos
$A \subset \Omega$	- Menge der mit Mängeln behafteten Autos

Zufällige Auswahl eines Autos:

<u>Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum</u>

Beispiel 1: Montagsauto

Formale Darstellung:

$$\rightarrow \quad P(Mo) = \frac{\#Mo}{\#\Omega} = \frac{\textit{Anzahl der Montagsautos}}{\textit{Anzahl aller Autos}}$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\textit{Anzahl Autos mit Mängeln}}{\textit{Anzahl aller Autos}}$$

Behauptung (s.o.):

Anteil der Autos mit Mängeln unter den Montagsautos ist größer als Anteil der Autos mit Mängeln unter allen Autos.

Beispiel 1: Montagsauto

Anteil Autos mit Mängeln unter den Montagsautos:

$$\frac{\textit{Anzahl Montagsautos mit Mängeln}}{\textit{Anzahl Montagsautos}} = \frac{\#Mo \cap A}{\#Mo} = \frac{\frac{\#Mo \cap A}{\#\Omega}}{\frac{\#Mo}{\#\Omega}} = \frac{P(Mo \cap A)}{P(Mo)}$$

Anteil Autos mit Mängeln unter allen Autos: $\frac{\#A}{\#\Omega} = P(A)$

Damit lautet die Behauptung formal: $\frac{P(Mo \cap A)}{P(Mo)} > P(A)$

Beispiel 1: Montagsauto

Interpretation: (falls Behauptung richtig)

Wenn ich feststelle, dass mein neues Auto an einem Montag hergestellt wurde, werde ich eher mit Mängeln rechnen als vor dieser Feststellung.

Das Ereignis "Montagsauto" beeinflusst das Ereignis "Mängelauto" positiv.

Beispiel 2: Würfeln mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln

Zielsetzungen:

(a) Summe der Augenzahlen gerade

(b) Summe der Augenzahlen möglichst groß

Ereignis: A: "Augenzahl des ersten Würfels $= 6$".

Intuitiv würde man sagen:

A hat keinen Einfluss bei der ersten Zielsetzung

A hat einen positiven Einfluss bei der zweiten Zielsetzung

Beispiel 2: Würfeln mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln

Formale Überprüfung:

Gesamtheit aller Kombinationen von Augenzahlen:

$$\Omega = \{(i,k) \mid i,k = 1,2,\ldots,6\}$$

Faire Würfel: $P((i,k)) = \frac{1}{36}$ für $i,k = 1,2,\ldots,6$.

$$\begin{aligned}
A &= \text{"Augenzahl des ersten Würfels} = 6\text{"} \\
&= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \\
B &= \text{"Summe der Augenzahlen ist gerade"} \\
&= \{(1,1),(1,3),(1,5),\ldots,(6,2),(6,4),(6,6)\} \\
C &= \text{"Summe der Augenzahlen ist mindestens 10"} \\
&= \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Würfeln mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln

Formale Überprüfung:

Gesamtheit aller Kombinationen von Augenzahlen:

$$\Omega = \{(i, k) \mid i, k = 1, 2, \ldots, 6\}$$

Faire Würfel: $P((i, k)) = \frac{1}{36}$ für $i, k = 1, 2, \ldots, 6.$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(6, 2), (6, 4), (6, 6)\} \\ A \cap C &= \{(6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Würfeln mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln

B liegt bei 18 Kombinationen insgesamt und 3 Kombinationen aus A vor, der Anteil ist also jeweils derselbe:

$$\frac{1}{2} = \frac{\#A \cap B}{\#A} = \frac{\frac{\#A \cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#B}{\#\Omega} = P(B) = \frac{1}{2}$$

C liegt bei 6 Kombinationen insgesamt und 3 Kombinationen aus A vor, der Anteil ist also bei A höher als insgesamt

$$\frac{1}{2} = \frac{\#A \cap C}{\#A} = \frac{\frac{\#A \cap C}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} > \frac{\#C}{\#\Omega} = P(C) = \frac{1}{6}$$

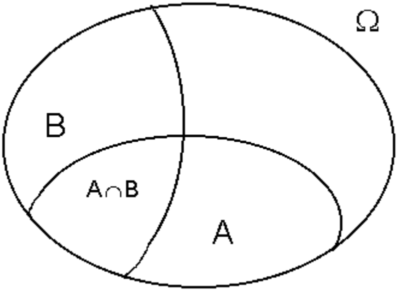
Die Intuition wird also durch die formale Überprüfung bestätigt.

Allgemein:

Überprüfung auf positiven (negativen, keinen) wahrscheinlichkeitstheoretischen Einfluss von einem Ereignis A auf ein Ereignis B durch **Vergleich** von

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \ (P(A) \neq 0) \ \text{ mit } \ P(B).$$

Definition



$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit von** B **unter der Bedingung** A**.**

$P(B|A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B an, wenn sicher ist, dass Ereignis A eintritt.

Folgerung:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Spezialfall:

$$B \subset A \;\rightarrow\; A \cap B = B$$

$$P(B) = P(B|A)P(A)$$

Sätze von Bayes

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die Teilgesamtheit A:

  Sei $(\Omega, A(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in A(\Omega)$ mit $P(A) \neq 0$.

  Sei ferner

  $$A(\Omega)_A = \{M \in A(\Omega) | M \subset A\}$$

  und

  $$P_A : A(\Omega)_A \to [0, 1]$$

  definiert durch

  $$P_A(M) = \frac{P(M)}{P(A)}.$$

  Dann ist $(A,\ A(\Omega)_A,\ P_A)$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten liefern

- ein modifiziertes Wahrscheinlichkeitsmaß für die Grundgesamtheit Ω:

  Sei $(\Omega, A(\Omega), P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in A(\Omega)$ mit $P(A) \neq 0$.

  Sei für $B \in A(\Omega)$

  $$P(B|A) := P_A(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

  dann ist $P(\cdot|A) : A(\Omega) \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega,\ A(\Omega))$.

Bemerkung:

Analogie “bedingte relative Häufigkeit” und “bedingte Wahrscheinlichkeit”

Bedingte relative Häufigkeit:

$$p(a|b) = \frac{p(a,b)}{p(b)}$$

$p(a,b)$	relative Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens der Merkmalsausprägungen a und b
$p(b)$	relative Häufigkeit der Bedingung b

Bemerkung:

Analogie “bedingte relative Häufigkeit” und “bedingte Wahrscheinlichkeit”

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse A und B.
$P(B)$	Wahrscheinlichkeit der Bedingung B

$P(A|B)$: Wahrscheinlichkeit für Ereignis A, falls sicher ist, dass Ereignis B eintritt.

B beeinflusst A positiv (im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn), falls

$$P(A|B) > P(A)$$

Beispiel: B - "Glatteis", A - "Unfall"

Kein Einfluss von Ereignis A auf Ereignis B ($P(A) \neq 0$):

$$P(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

äquivalent dazu

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

bzw. ($P(B) \neq 0$):

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

"kein Einfluss von Ereignis B auf Ereignis A".

Definition:

Sei $(\Omega,\ A(\Omega),\ P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in A(\Omega)$ heißen **unabhängig**, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

(Vergleiche dazu: Definition der Unabhängigkeit von Merkmalen

$$p(a, b) = p(a) \cdot p(b),\ \text{für alle a und b}\textit{)}$$

Bemerkung:

"A beeinflusst B positiv":

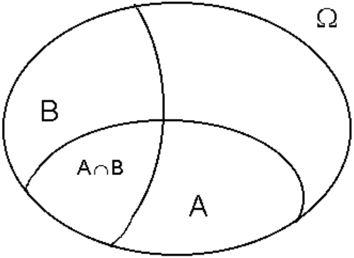
$$\begin{aligned} & P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B) \\ \Leftrightarrow \quad & P(A \cap B) > P(A)P(B) \\ \Leftrightarrow \quad & P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{"}B \text{ beeinflusst } A \text{ positiv"} \end{aligned}$$

Also: Einfluss im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn ist eine symmetrische Beziehung, also nicht notwendig kausal.

Zusammenfassung: Analyse eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen A und B

Vergleich von: Wahrscheinlichkeit von B ($P(B)$) mit bedingter Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A (*Wahrscheinlichkeit von B, falls sicher ist, dass A eintritt*):

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} :$$



Zusammenfassung: Analyse eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen A und B

1.) $P(B) < \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: Unter der Voraussetzung, dass A eintritt, ist B wahrscheinlicher. A "beeinflusst B positiv".

2.) $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: Die Wahrscheinlichkeit von B verändert sich durch die Voraussetzung A nicht. A "beeinflusst B nicht".

3.) $P(B) > \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: Die Wahrscheinlichkeit von B wird durch die Voraussetzung A geringer. A "beeinflusst B negativ".

Beispiel: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

T Lebensdauer einer Anlage
(Zeitdauer vom Einschalten bis zum ersten Ausfall)
T exponentialverteilt mit Parameter λ
$P(T \leq t) = 1 - \exp^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(erwartete Lebensdauer)}$$

Beispiel: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Angenommen: Anlage läuft schon $t_0 > 0$ Zeiteinheiten störungsfrei.

Frage: Haben sich die "Lebenschancen" der Anlage durch die bisherige Betriebsdauer verschlechtert, verbessert oder sind sie gleichgeblieben?

$T - t_0$: "Restlebensdauer" der Anlage

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Restlebensdauer einer Anlage, die t_0 Zeiteinheiten störungsfrei gelaufen ist $(T > t_0)$:

$$P(T - t_0 \leq t | T > t_0) = \ ?$$

Beispiel: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

$$
\begin{aligned}
P(T - t_0 \leq t | T > t_0) &= \frac{P(t_0 < T, T - t_0 \leq t)}{P(T > t_0)} \\
&= \frac{P(t_0 < T \leq t + t_0)}{P(T > t_0)} = \frac{F(t + t_0) - F(t_0)}{1 - F(t_0)} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{e^{-\lambda t_0}} \\
&= \frac{e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t_0}} \\
&= 1 - e^{-\lambda t} \\
&= P(T \leq t).
\end{aligned}
$$

Die Restlebensdauer einer Anlage die t_0 Zeiteinheiten störungsfrei gelaufen ist, ist genauso verteilt wie die Lebensdauer einer neuen Anlage.

Die Lebenschancen sind also trotz der Betriebsdauer t_0 gleichgeblieben ("keine Alterung").

Die Anlage hat kein "Gedächtnis" bezüglich der bisherigen Betriebsdauer.

Man bezeichnet dies als

"Gedächtnislosigkeit / Markow-Eigenschaft der Exponentialverteilung"

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

Ein(e) Studienabgänger(in) der Universität Karlsruhe (Wi.-Ing.) bewirbt sich bei einem großen deutschen Konzern. Das Auswahlverfahren des Konzerns verläuft in folgenden Schritten:

1.) Sichtung der Bewerbungsunterlagen

2.) Assessment Center (AC)

3.) Interview in der Personalabteilung

4.) Persönliches Gespräch mit dem Abteilungsleiter der entsprechenden Abteilung

Beispiel: “Übergangswahrscheinlichkeiten”

Nach jedem der Schritte 1.) - 4.) wird eine Entscheidung über die Weiterführung des Verfahrens getroffen. Nach Schritt 4.) trifft der Abteilungsleiter die Einstellungsentscheidung.

Die möglichen Ereignisse für die Bewerberin (den Bewerber) sind:

A1	Absage	nach	Schritt	1
A2	-"-	-"-	-"-	2
A3	-"-	-"-	-"-	3
A4	-"-	-"-	-"-	4
E	Einstellungsangebot			

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

Sie (er) schätzt ihre (seine) Chancen wie folgt ein:

80% für keine Absage nach Schritt 1

50% für das Überstehen des AC, wenn eine Einladung dazu erfolgt

70% für eine guten Eindruck (keine Absage) beim Interview, falls diese Stufe erreicht wird

95% für eine Einstellung nach dem Gespräch mit dem Abteilungsleiter.

Wie groß sind die Einstellungsaussichten?

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

Sei

Ω	die Menge der Bewerber/innen.
$AC \subset \Omega$	-"- -"- -"- , die eine Einladung zum AC erhalten
$IP \subset \Omega$	-"- -"- -"- , die eine Einladung zum Interview in der Personalabteilung erhalten
$GP \subset \Omega$	-"- -"- -"- , die zum persönlichen Gespräch gebeten werden
$E \subset \Omega$	-"- -"- -"- , die ein Einstellungsangebot erhalten.

Offensichtlich gilt:

$$E \subset GP \subset IP \subset AC \subset \Omega$$

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

Die angegebenen Chancen entsprechen damit den (bedingten) Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(AC) &= 0.8 \\ P(IP|AC) &= 0.5 \\ P(GP|IP) &= 0.7 \\ P(E|GP) &= 0.95 \end{aligned}$$

Für $B \subset A: \quad B \cap A = B$ gilt

$$P(B) = P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \cdot P(A) = P(B|A)\ P(A)$$

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
0.5 &= P(IP|AC) = \frac{P(IP \cap AC)}{P(AC)} = \frac{P(IP)}{P(AC)} = \frac{P(IP)}{0.8} \\
&\Rightarrow\ P(IP) = 0.4 \\
0.7 &= P(GP|IP) = \frac{P(GP \cap IP)}{P(IP)} = \frac{P(GP)}{P(IP)} = \frac{P(GP)}{0.4} \\
&\Rightarrow\ P(GP) = 0.28 \\
0.95 &= P(E|GP) = \frac{P(E \cap GP)}{P(GP)} = \frac{P(E)}{P(GP)} = \frac{P(E)}{0.28} \\
&\Rightarrow\ P(E) = 0.266
\end{aligned}
$$

Beispiel: "Übergangswahrscheinlichkeiten"

$\mathrm{E} \subset \mathrm{GP} \subset \mathrm{IP} \subset \mathrm{AC} \subset \Omega$:

$$P(E) = P(E|GP) \cdot P(GP|IP) \cdot P(IP|AC) \cdot P(AC)$$

Allgemein:

Satz:

Sei

- $\Omega, A(\Omega), P$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,
- $A_1, \ldots, A_k \in A(\Omega)$ Ereignisse mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$ und $P(A_1) \neq 0$.

Dann gilt

$$P(A_1) = P(A_1|A_2) \cdot P(A_2|A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_{k-1}|A_k)P(A_k).$$

Folgerung:

Zu $M_1, \ldots, M_n \subset \Omega$ berechne:

$$P(M_1 \cap \ldots \cap M_n)$$

Setze:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & M_1 \cap \ldots \cap M_n \\ A_2 & = & M_2 \cap \ldots \cap M_n \\ & \ldots & \\ A_{n-1} & = & M_{n-1} \cap M_n \\ A_n & = & M_n \end{array}$$

Dann ist: $P(A_1) = P(A_1|A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n)$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} P(A_{k-1}|A_k) &= P(M_{k-1}\cap\ldots\cap M_n|M_k\cap\ldots\cap M_n) \\ &= \frac{P(M_{k-1}\cap\ldots\cap M_n)}{P(M_k\cap\ldots\cap M_n)} = P(M_{k-1}|M_k\cap\ldots\cap M_n) \end{aligned}$$

Beispiel:

Ein Geschäftsreisender findet bei der Hauptversammlung des Daimler-Chrysler Konzerns einen Autoschlüssel zu einem Auto der Marke Mercedes-Benz und begibt sich bei den umliegenden Parkmöglichkeiten auf die Suche nach dem zugehörigen Auto.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um sein Wunschauto, ein Fahrzeug der S-Klasse mit Klimaanlage und Kühlfach handelt?

Beispiel:

Sei

Ω	die Menge aller Fahrzeuge der Marke Mercedes-Benz
$S \subset \Omega$	die Menge aller S-Klasse Wagen
$KA \subset \Omega$	die Menge aller MB-Autos mit Klimaanlage
$KF \subset \Omega$	die Menge aller MB-Autos mit Kühlfach

Gesucht ist:

$$P(S \cap KA \cap KF)$$

Beispiel:

Vorgehensweise:

1.) Bestimme $P(S) =$ Wahrscheinlichkeit eines S-Klasse-Fahrzeugs.

2.) Bestimme $P(KA|S) =$ Wahrscheinlichkeit, daß ein S-Klasse-Fahrzeug eine Klimaanlage besitzt.

3.) Bestimme $P(KF|KA \cap S) =$ Wahrscheinlichkeit, daß ein S-Klasse-Fahrzeug mit Klimaanlage ein Kühlfach hat.

Damit: $$P(S \cap KA \cap KF) = P(KF|S \cap KA) \cdot P(KA|S) \cdot P(S)$$

Wegen:

$$
\begin{aligned}
P(KA|S) &= \frac{P(S \cap KA)}{P(S)} \\
P(S \cap KA) &= P(KA|S)P(S) \\
P(KF|KA \cap S) &= \frac{P(KF \cap KA \cap S)}{P(KA \cap S)} \\
P(KF \cap KA \cap S) &= P(KF|KA \cap S)P(KA \cap S) \\
P(KA|S) &= \frac{P(KA \cap S)}{P(S)} \\
P(KA \cap S) &= P(KA|S)P(S) \\
P(KF \cap KA \cap S) &= P(KF|KA \cap S)P(KA|S)P(S)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Montagsauto

An den fünf Arbeitstagen einer Woche wurden folgende Stückzahlen in der Produktion beobachtet:

Mo	Di	Mi	Do	Fr	$\sum$
1200	1500	1200	1200	900	6000

Die Kontrollabteilung stellte außerdem folgende Anzahl von Produkten mit Mängeln fest:

Mo	Di	Mi	Do	Fr	$\sum$
20	20	15	12	13	80

Zufällige Entnahme einer Produktionseinheit: Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum

Fragen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Produkt mit Mängeln ?

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Produkte mit Mängel}}{\text{Anzahl der Produkte insgesamt}} = \frac{80}{6000} = 0.01\overline{3}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt mit Mängeln am Montag produziert wurde ?

$$P(Mo \mid A) = \frac{P(Mo \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{\#Mo \cap A}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{\#Mo \cap A}{\#A} = \frac{20}{80} = 0.25$$

Achtung: $P(A \mid Mo) = \frac{20}{1200} = \frac{1}{60} \neq P(Mo \mid A)$

Fazit: Die Berechnung aus absoluten Häufigkeiten ist leicht.

Berechnung aus relativen Häufigkeiten:

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Produktion	20%	25%	20%	20%	15%
davon Ausschuss	$1.\overline{6}\%$	$1.\overline{3}\%$	1.25%	1%	$1.\overline{4}\%$

Die Tabelle gibt folgende Wahrscheinlichkeiten bei zufälliger Entnahme einer Einheit an:

Mo	Di	Mi	Do	Fr
P(Mo)	P(Di)	P(Mi)	P(Do)	P(Fr)
$P(A \mid \text{Mo})$	$P(A \mid \text{Di})$	$P(A \mid \text{Mi})$	$P(A \mid \text{Do})$	$P(A \mid \text{Fr})$

Berechnung aus relativen Häufigkeiten:

Gesucht ist:

$$P(A) = ? \quad \text{und} \quad P(Mo \mid A) = ?$$

<u>Fallunterscheidung</u>:

Für eine ausgewählte Einheit w gilt genau einer der 5 Fälle:

1.) fertiggestellt	am Montag	$w \in Mo$
2.) fertiggestellt	am Dienstag	$w \in Di$
3.) fertiggestellt	am Mittwoch	$w \in Mi$
4.) fertiggestellt	am Donnerstag	$w \in Do$
5.) fertiggestellt	am Freitag	$w \in Fr$

Berechnung aus relativen Häufigkeiten:

Wegen $\Omega = Mo \cup Di \cup Mi \cup Do \cup Fr$ gilt:

$A = (A \cap Mo) \cup (A \cap Di) \cup (A \cap Mi) \cup (A \cap Do) \cup (A \cap Fr)$.

Da Mo, Di, Mi, Do, Fr paarweise disjunkt sind (jedes Produkt wird an genau einem Tag fertiggestellt), ist

$$1 = P(\Omega) = P(Mo) + P(Di) + P(Mi) + P(Do) + P(Fr)$$

und

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap Mo) + \ldots + P(A \cap Fr) \\ &= P(A \mid Mo)P(Mo) + \ldots + P(A \mid Fr)P(Fr) \end{aligned}$$

Berechnung aus relativen Häufigkeiten:

Wegen

$$P(A \cap Mo) = P(A \mid Mo)P(Mo), \ldots$$

gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid Mo)P(Mo) + \ldots + P(A \mid Fr)P(Fr) \\ &= 0.01\overline{6} \cdot 0.20 + 0.01\overline{3} \cdot 0.25 + 0.0125 \cdot 0.20 + \\ &\quad +0.01 \cdot 0.20 + 0.01\overline{4} \cdot 0.15 \\ &= 0.01\overline{3}. \end{aligned}$$

siehe *"Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit"*

Berechnung aus relativen Häufigkeiten:

Weiterhin gilt

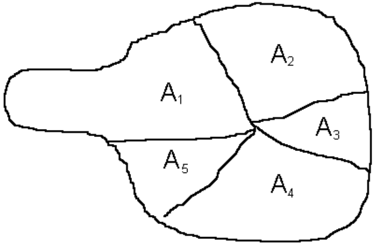
$$
\begin{aligned}
P(Mo \mid A) &= \frac{P(A \cap Mo)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \mid Mo)P(Mo)}{P(A \mid Mo)P(Mo) + \ldots + P(A \mid Fr)P(Fr)} \\
&= \frac{0.01\bar{6} \cdot 0.2}{0.01\bar{3}} = 0.25
\end{aligned}
$$

siehe *"Satz von Bayes"*

Allgemein (Satz 8.13 und Satz 8.14)

Ausgangspunkt:

Grundgesamtheit Ω zerlegt in Teilbereiche $A_i, i \in I$ (Anzahl der Teilbereiche endlich oder abzählbar unendlich)



"zerlegt": jeder Punkt $\omega \in \Omega$ gehört zu genau einem Teilbereich A_i:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \quad \text{und} \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad \text{für} \quad j \neq k$$

Allgemein (Satz 8.13 und Satz 8.14)

$\underline{B \subset \Omega}$: Dann gilt

- **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \underbrace{P(A_i \cap B)}_{P(A_i) * P(B|A_i)}$$

- **Satz von Bayes**

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i \in I} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}$$

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Wiederholung:

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ist.

Mehr als zwei Ereignisse:

$A_i, i \in I$ Folge von Ereignissen (endlich oder unendlich)

Forderung bei Unabhängigkeit:

Für jede endliche Auswahl $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ gilt

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_n}) \qquad (*)$$

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Anzahl der zu überprüfenden Gleichungen:

Anzahl der Ereignisse	Anzahl der Gleichungen
2	1
3	$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 4$
4	$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 11$
$\vdots$	
k	$\binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k - k - 1$
$\vdots$	
∞	∞

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Die Forderung entspricht damit den Einzelforderungen:

Aus der Liste der Ereignisse sind

- je zwei ausgewählte Ereignisse unabhängig
- je drei ausgewählte Ereignisse unabhängig
- je vier ausgewählte Ereignisse unabhängig
- usw.

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Man beachte: Aus Gleichung $(*)$ folgt nicht die entsprechende Gleichung für eine Teilauswahl der Ereignisse und umgekehrt.

Dazu **Beispiel:**

Mit einem Würfel wird zweimal gewürfelt. Betrachtet werden die Ereignisse:

A: Augenzahl beim ersten Wurf gerade,

B: Augenzahl beim zweiten Wurf gerade,

C: Summe der Augenzahlen ist ungerade.

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \text{ und} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{4} = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= \frac{1}{4} = P(B)P(C) \end{aligned}$$

d.h. die Ereignisse sind paarweise unabhängig. Anderseits ist

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Also: Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht die Unabhängigkeit aller drei Ereignisse.

Umgekehrt: Ist $C = \emptyset$ dann gilt für beliebige A und B, d.h. auch für abhängige A und B

$$0 = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0$$

Hinweis:
Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind wichtig im Zusammenhang mit mehrstufigen Zufallsprozessen (s. Beispiel: Türenproblem)

Mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiel: “Türenproblem”

Hinter einer von drei Türen steht der Gewinn. Der Kandidat gewinnt, wenn sie (er) die richtige Tür auswählt.

- **1. Stufe:** Der Kandidat wählt eine Tür aus
- **2. Stufe:** Hinter mindestens einer der beiden verbleibenden Türen steht der Gewinn nicht.
  Der Moderator öffnet eine Tür, hinter der kein Gewinn steht
- **3. Stufe:** Der Kandidat hat die Wahl, ob sie (er) bei der ausgewählten Tür bleibt oder zur anderen geschlossenen Tür wechselt.

Mehrstufige Zufallsexperimente

Strategien:

1.) Immer bleiben ("Standhafter").

2.) Immer wechseln ("Wechsler").

3.) Nach Zufallsprinzip ("Randomisierer")

1.) - 3.) repräsentiert durch Zufallsprozess ($0 \leq \pi \leq 1$):

π	Wahrscheinlichkeit Tür bei zu behalten.
$1 - \pi$	Wahrscheinlichkeit des Wechsels.
$\pi = 1$	"Standhafter"
$\pi = 0$	"Wechsler/innen"

Mehrstufige Zufallsexperimente

Die Tür mit dem Gewinn nummerieren wir für die (den) Kandidatin/en unsichtbar mit einer 1, die anderen Türen mit 2 und 3.

Die drei Türen bilden die Grundgesamtheit $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$.

Stufe 1: Ohne zusätzliche Information kann die (der) Kandidat/in nur zufällig auswählen:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$$

Stufe 2: Je nach Wahl in Stufe 1 verbleibt für Stufe 2 eine andere

$$\text{Grundgesamtheit:}\quad \begin{array}{ll} \text{bei Wahl von 1 :} & \Omega_2^1 = \{2, 3\} \\ \text{bei Wahl von 2 :} & \Omega_2^2 = \{1, 3\} \\ \text{bei Wahl von 3 :} & \Omega_2^3 = \{1, 2\} \end{array}$$

Stufe 2:

Bei der Wahl von 1 in Stufe 1 kann der Moderator zwischen den Türen 2 und 3 wählen. Er wählt Tür 2 mit Wahrscheinlichkeit p wobei $0 \leq p \leq 1$

$$P(2) = p, \qquad P(3) = 1 - p$$

Bei der Wahl von 2 (3) in Stufe 1 öffnet er die Tür 3 (2):

$$\begin{array}{rl} P(1) = 0, & P(3) = 1 \\ (P(1) = 0, & P(2) = 1) \end{array}$$

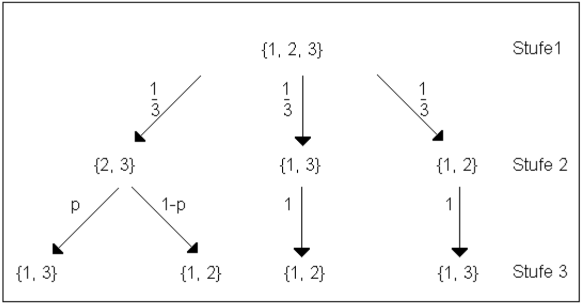
Stufe 3:

In **<u>Stufe 3</u>** ergeben sich jetzt folgende Grundgesamtheiten:

Tür 1 in Stufe 1, Tür 2 in Stufe 2	$\{1, 3\}$
Tür 1 in Stufe 1, Tür 3 in Stufe 2	$\{1, 2\}$
Tür 2 in Stufe 1	$\{1, 2\}$
Tür 3 in Stufe 1	$\{1, 3\}$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Möglichkeiten der (des) Kandidatin/en auf Stufe 3: Auswahl einer der verbleibenden beiden Türen.



Baum 1

Mehrstufige Zufallsexperimente

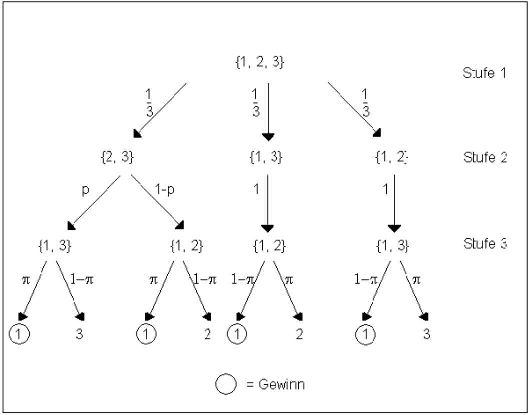
Vorhandene Information: Kenntnis der in Stufe 1 ausgewählten Tür. Hinter dieser oder der anderen verbliebenen Tür ist der Gewinn.

Strategie: Festlegung einer Wahrscheinlichkeit π für die Beibehaltung der in Stufe 1 gewählten Tür.

$$\begin{array}{rl} \pi = 1 & \text{(Standhafte)} \\ 0 < \pi < 1 & \text{(Randomisierer)} \\ \pi = 0 & \text{(Wechsler)} \end{array}$$

Optimale Strategie: Wahrscheinlichkeit, bei der die Gewinnwahrscheinlichkeit maximal ist.

Mehrstufige Zufallsexperimente



Baum 2

Mehrstufige Zufallsexperimente

Gewinnwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}p \cdot \pi + \frac{1}{3}(1-p)\cdot \pi + \frac{1}{3}(1-\pi) + \frac{1}{3}(1-\pi) \\ = \;& \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi \\ = \;& \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit nimmt also ab, je größer π gewählt wird.

Optimale Strategie ist demnach $\pi = 0$, d.h. die (der) Kandidat/in sollte die Tür wechseln.

Mehrstufige Zufallsexperimente wie im Türenproblem

Bestehen darin, in jeder Stufe einen Wahrscheinlichkeitsraum (Zufallsvorgang) für die nächste Stufe nach einem Zufallsprinzip auszuwählen.

<u>Rückführung</u> in einen (einstufigen) Zufallsvorgang durch Bestimmung aller “Entwicklungspfade” und der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.