Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel VII - Funktion und Transformation von Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Funktionen von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen sind häufig Argument einer Funktion. Sei also $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
z.B. $g(x) = e^x, \qquad g(x) = x^2 + 3x + 2$

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von der Grundgesamtheit eines Wahrscheinlichkeitsraumes in die Menge der reellen Zahlen: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zu $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega)$ Wert der Zufallsvariablen. Wird dieser Wert eingesetzt in g, so erhalten wir: $g(X(\omega))$

Dies entspricht dem Hintereinanderausführen der beiden Funktionen:
$g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $g \circ X(\omega) = g(X(\omega))$ für $\omega \in \Omega$

Funktionen von Zufallsvariablen

Konsequenz:

$g \circ X$ **ist Zufallsvariable, wenn** $g \circ X$ **messbar ist** (für die Borelsche Menge A ist Urbild von A bei $g \circ X$ ein Ereignis in Ω).

Schreibweise: meist $g(X)$ statt $g \circ X$

Beispiel: Petersburg-Paradoxon

Beispiel: Münzwurf (Petersburg - Paradoxon)
ω Wurfserie bis zum ersten Wurf mit Ergebnis "Zahl",
$X(\omega)$ Anzahl der Würfe bei der Wurfserie ω.

Gewinn: $G = 2^{\text{Anzahl der Würfe}} = 2^{X(\omega)}$, also mit $g(x) = 2^x$ ist der Gewinn bei Wurfserie ω: $G(\omega) = g(X(\omega))$

Bemerkung:
Nimmt X nur Werte in einem Teilbereich D von $\mathbb{R}$ an, so muß g auch nur für die Argumente aus D definiert sein.

Beispiel

Beispiel:
Kontrolle einer Warenpartie

Die Entscheidung über Annahme oder Ablehnung einer Warenpartie hänge ab von der Anzahl der schlechten Teile, die in der Stichprobe gefunden wurden.

Z.B.: Bei einer Stichprobe vom Umfang 200 wird die Warenpartie **abgelehnt,** wenn **mehr als 4** schlechte Teile gefunden wurden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme einer Warenpartie mit einem Ausschußteil von 0.01 ?

Beispiel

Zur Vereinfachung: Ziehen mit Zurücklegen

Die Anzahl X schlechter Teile in der Stichprobe ist binomialverteilt mit Parameter p, dem Ausschußanteil der Partie:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \, p^k \, (1 - p)^{n-k}$$

Beispiel

Mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{für} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

bedeutet

$g(X) = 1$, dass die Partie angenommen wird und
$g(X) = 0$, dass die Warenpartie abgelehnt wird.

Beispiel

Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Warenpartie:

$$
\begin{aligned}
P(g(X)=1) &= P(X \leq 4) = \sum_{i=0}^{4} P(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}
$$

Mit $n = 200, p = 0.01$ ist

$$
\begin{aligned}
P(g(X)=1) &= \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{4} \binom{200}{i} 0.01^i (1-0.01)^{200-i} = 0.948
\end{aligned}
$$

Beispiel

Mit der Näherung durch die Poissonverteilung erhalten wir mit $np = 200 \cdot 0.01 = 2$

$$P(g(X) = 1) = \sum_{i=0}^{4} \frac{2^i}{i!} e^{-2} = 0.9473$$

aus einer Tabelle.

Beispiel

Wahrscheinlichkeitsverteilung von $g(X)$:

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
P(g(X) = y) &= P(\{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\}) \\
&= \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} P(X = \alpha_i) & \text{für } g(\alpha_i) = y \\ 0 & \text{falls } g(\alpha_i) \neq y \text{ für alle } i. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beispiel

X **stetig** mit Dichte f_x :

Verteilungsfunktion von $g(X)$ ist

$$
\begin{aligned}
F_{g(X)}(\alpha) &= P(g(X) \leq \alpha) \\
&= P(X \in \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq \alpha\}) \\
&= \int\limits_{\{x|g(x)\leq\alpha\}} f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

Beispiel

Bemerkung:

Falls X stetig ist, dann ist $g(X)$ dennoch nicht notwendig stetig

Beispiel:

X Qualitätsmerkmal eines Produktes normalverteilt, mit Sollwert a als Mittelwert und Varianz σ^2.

Toleranzbereich: $[a - 3\sigma,\ a + 3\sigma]$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{gut} & x \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma] \\ 0 & \text{schlecht} & x \notin [a - 3\sigma, a + 3\sigma] \end{cases}$$

Beispiel

$g(X)$ nimmt nur die Werte 0 und 1 an, ist also diskret.

Wahrscheinlichkeit für ein **korrekt produziertes Teil**:

a) $P(g(X) = 1) = E(g(X))$

bzw.

$$\text{b) } P(g(X) = 1) \quad = \quad P(X \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma])$$
$$= \quad F_{\mu,\sigma^2}(a + 3\sigma) - F_{\mu,\sigma^2}(a - 3\sigma)$$
$$= \quad \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.99865 - 0.00135$$
$$= \quad 0.9973$$

Beispiel

Beispiel: $g(x) = x^2$

$\alpha \geq 0$: $\qquad x^2 \leq \alpha \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} \leq x \leq \sqrt{\alpha}$

Daher gilt:

$$
\begin{aligned}
F_{g(X)}(\alpha) &= \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\sqrt{\alpha}} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{\alpha}} f_X(x)dx \\
&= F_X(\sqrt{\alpha}) - F_X(-\sqrt{\alpha})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Für die korrespondierende Dichte (an den Stellen, an denen $F_{g(X)}$ differenzierbar ist) gilt

$$\begin{aligned} f_{g(X)}(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(F_X(\sqrt{\alpha}) - F_X(-\sqrt{\alpha}))) \\ &= F'_X(\sqrt{\alpha})\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - F'_X(-\sqrt{\alpha})(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(f_x(\sqrt{\alpha}) + f_x(-\sqrt{\alpha})) \end{aligned}$$

Für $\alpha < 0$ ist $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < \alpha\} = \emptyset$ und damit

$$F_{g(X)}(\alpha) = 0 \text{ und } f_{g(X)}(\alpha) = 0$$

Beispiel

1.) X dreiecksverteilt über dem Intervall $[-a, a]$

Dichte von X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ \frac{1}{a^2}(x+a) & -a \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{a^2}(a-x) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

Beispiel

Verteilungsfunktion von X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ \frac{1}{2a^2}(x+a)^2 & -a \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2a^2}(a-x)^2 + 1 & 0 \leq x \leq a \\ 1 & a < x \end{cases}$$

Beispiel

Daraus ergibt sich für $0 \leq \alpha \leq a^2$:

$$
\begin{aligned}
F_{g(X)}(\alpha) &= F_X(\sqrt{\alpha}) - F_X(-\sqrt{\alpha}) \\
&= 1 - \frac{1}{2a^2}(a - \sqrt{\alpha})^2 - \frac{1}{2a^2}(-\sqrt{\alpha} + a)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{a^2}(a - \sqrt{\alpha})^2 = 1 - (a - \sqrt{\alpha})f_X(\sqrt{\alpha})
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}F_{g(X)}(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(1 - \frac{1}{a^2}(a - \sqrt{\alpha})^2) \\
&= -\frac{2}{a^2}(a - \sqrt{\alpha})\left(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) \\
&= \frac{1}{a^2\sqrt{\alpha}}(a - \sqrt{\alpha})
\end{aligned}
$$

Beispiel

oder aus der Gleichung für die Dichte

$$\begin{aligned} f_{g(X)}(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(f_X(\sqrt{\alpha}) + f_X(-\sqrt{\alpha})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{a^2}(a-\sqrt{\alpha}) + \frac{1}{a^2}(a-\sqrt{\alpha})\right) \\ &= \frac{1}{a^2\sqrt{\alpha}}(a-\sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

Für $\alpha > a^2$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(\alpha) &= F_X(\sqrt{\alpha}) - F_X(-\sqrt{\alpha}) = 1 - 0 = 1 \\ f_{g(X)}(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(f_X(\sqrt{\alpha}) + f_X(-\sqrt{\alpha})) = 0 \end{aligned}$$

Beispiel

2.) X **gleichverteilt** über $[-a, +a]$

Dichte von X

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion von X

$$F_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \leq -a \\ \frac{1}{2a}(x + a) & -a < \alpha < a \\ 1 & a \leq \alpha \end{cases}$$

Beispiel

Daraus ergibt sich für $0 < \alpha < a^2$:

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(\alpha) &= F_X(\sqrt{\alpha}) - F_X(-\sqrt{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2a}((\sqrt{\alpha} + a) - (-\sqrt{\alpha} + a)) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{a} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{g(X)}(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(f_X(\sqrt{\alpha}) - f_X(-\sqrt{\alpha})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}) = \frac{1}{2a\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

Für $\alpha \geq a^2$ ist $F_{g(X)}(\alpha) = 1$ und $f_{g(X)}(\alpha) = 0$.

Transformation von Zufallsvariablen

Transformation: Die Funktion g ist invertierbar. Es gibt eine Umkehrfunktion g^{-1}.

Beispiel: Währungsumrechnung, Dimensionsänderung, Logarithmieren

Bemerkung:
Nimmt X nur Werte im D an, so muss g auch nur von $g(D)$ auf D invertierbar sein.

a) X diskret mit Werten $\{\alpha_i\}_{i \in I}; \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$:
   g ist Transformation, falls $g(\alpha_i) \neq g(\alpha_j)$ für $i \neq j$ ist. Dann gilt
$$P(g(X) = g(\alpha_i)) = P(X = \alpha_i)$$

Transformation von Zufallsvariablen

b) X stetig mit Dichte f_X:

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(\alpha) &= P(g(X) \leq \alpha) \\ &= \int_{g(X)\leq\alpha} f_X(x)dx \end{aligned}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ x &= g^{-1}(y) \quad \text{und damit} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \end{aligned}$$

folgt:

$$F_{g(X)}(\alpha) = \int_{y \le \alpha} f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\frac{1}{\mid g'(g^{-1}(y)) \mid}}_{dx} dy.$$

Transformation von Zufallsvariablen

Damit gilt für die Dichte von $g(X)$

$$f_{g(X)}(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} & \text{für } y \text{ mit } g'(g^{-1}(y)) \text{ existiert} \\ & \text{und } g'(g^{-1}(y)) \neq 0. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Zusammenfassung:

g ist bijektiv, d.h. es gibt zu g eine inverse Funktion g^{-1}.

X diskret mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$(P(g(X) = y) = (P(\{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\})$$

1.) Gibt es ein α_i mit $g(\alpha_i) = y$, so ist $\alpha_i = g^{-1}(y)$ eindeutig bestimmt und es gilt

$$\begin{aligned} P(g(X) = y) &= P(X = \alpha_i) = P(X = g^{-1}(y)) \\ P(X = \alpha_i) &= P(g(X) = g(\alpha_i)) \end{aligned}$$

2.) Gibt es kein α_i mit $g(\alpha_i) = y$, so ist

$$P(g(X) = y) = P(\emptyset) = 0$$

Beispiel

Beispiel: Münzwurf (Petersburg Paradoxon)

- ω Wurfserie bis zum ersten Wurf mit Ergebnis "Zahl",
- $X(\omega)$ Anzahl der Würfe bei der Wurfserie ω

Gewinn: $G = 2^{\text{Anzahl der Würfe}} = 2^{X(\omega)}$, also $g(x) = 2^x$

$$P(g(X) = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

$$\begin{aligned} y = 16 \quad &: \quad P(g(X) = 16) = P(X = 4) = \frac{1}{16} \\ y = 24 \quad &: \quad y \neq 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \cdots \quad P(G(X) = 24) = 0 \end{aligned}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Zusammenfassung: g bijektiv, d.h. es gibt zu g eine inverse Funktion g^{-1}.

X stetig mit Dichte f_x: Ist g differenzierbar mit $g^{'}(g^{-1}(y)) \neq 0$ bis auf endlich viele Stellen y, so gilt:

$$\begin{aligned}
F_{g(X)}(\alpha) &= P(g(X) \leq \alpha) \\
F_{g(X)}(\alpha) &= \int\limits_{y=g(x)\leq\alpha} f_X(x)dx \\
&= \int\limits_{y=g(g^{-1}(y))\leq\alpha} f_X(g^{-1}(y)) \mid (g^{-1})'(y) \mid dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{\mid g'(g^{-1}(y)) \mid} dy
\end{aligned}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Damit gilt für alle y mit $g^{'}(g^{-1}(y)) \neq 0$ die

Transformationsregel für Dichtefunktionen

$$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{\mid g'(g^{-1}(y)) \mid}$$

Beispiel - stetig

Beispiel:

$g(x) = x^3$

und damit

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}, \quad g'(x) = 3x^2,\ g'(g^{-1}(y)) = 3(\sqrt[3]{y})^2 = 3\sqrt[3]{y^2}$$

X exponentialverteilt mit Parameter λ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Dichte von $g(x)$ mit Transformationsregel

$$f_{g(x)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Beispiel - stetig

oder (über Verteilungsfunktion für $\alpha > 0$)

$$
\begin{aligned}
F_{X^3}(\alpha) &= \int_{g(x)\leq\alpha} f(x)dx = \int_{0\leq x^3\leq\alpha} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\sqrt[3]{\alpha}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\sqrt[3]{\alpha}} = 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{\alpha}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
f_{X^3}(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{\alpha}}) \\
&= \lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{\alpha}} \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}} \qquad \textit{für} \quad \alpha > 0.
\end{aligned}
$$

Transformation von Zufallsvariablen

Bemerkung:
Nimmt X nur Werte in einem Teilbereich D der reellen Zahlen an, so muss g auch nur in diesem Teilbereich invertierbar sein.

Beispiel:

X gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dann haben nur Teilbereiche von $[0, 1]$ positive Wahrscheinlichkeiten (X *nimmt nur Werte in* $[0, 1]$ *an*).

$g(x) = x^4$ ist insgesamt nicht invertierbar, aber für $y \in [0, 1]$ gibt es genau ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = y$, nämlich

$$x = g^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}.$$

Transformation von Zufallsvariablen

Mit

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g'(g^{-1}(y)) = 4(\sqrt[4]{y})^3$$

ist die Dichte von $g(X) = X^4$ nach der Transformationsregel

$$\begin{aligned} f_{g(X)}(y) &= \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} & \text{für } y \in (0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} & \text{für } y \in (0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel zur Transformation: Wechselkursrisiko

Zeitpunkt: 01.11.2006

Ein Vertrag garantiere eine Auszahlung von 1,25 Million \$ zum 01.07.2007
Dabei entstehen Kosten in Höhe von 700 000 Euro
Der Gewinn ist abhängig vom Wechselkurs

Annahme: Der Wechselkurs zum 01.07.2007 sei normalverteilt mit Mittelwert 1,25 \$ pro Euro (bzw. 0,80 Euro pro \$) und Varianz 0.01

> *Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns?*
>
> *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust?*
>
> *Wie groß ist der Gewinn mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens?*

Anwendungsbeispiel zur Transformation: Wechselkursrisiko

Bei einem \$/Euro - Wechselkurs von x (x Euro für einen \$) ist der Gewinn

$$y = G(x) = 1\ 250\ 000\ x - 700\ 000$$

in Euro.

Damit ist

$$G^{-1}(y) = \frac{1}{1\ 250\ 000}(y + 700\ 000)$$

und $G'(x) = 1\ 250\ 000$, $G'(G^{-1}(y)) = 1\ 250\ 000$.

Dichtefunktion von X ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 0.1} e^{-\frac{(x-0.8)^2}{2\cdot 0.01}}$$

Anwendungsbeispiel zur Transformation: Wechselkursrisiko

Dichtefunktion des Gewinns $G(X)$ ist damit $f(G^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{G'(G^{-1}(y))}$

$$
\begin{aligned}
f_{G(X)}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 0.1} e^{-\frac{(\frac{1}{1\ 250\ 000}(y+700\ 000)-0.8)^2}{2\cdot 0.01}} \frac{1}{1\ 250\ 000} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 125\ 000}\ e^{-\frac{(y-300\ 000)^2}{2\cdot 125\ 000^2}} \sim \mathcal{N}(300\ 000, 125\ 000^2)
\end{aligned}
$$

Der Gewinn ist demnach normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 300\ 000$ Euro und einer Varianz von $\sigma^2 = 125\ 000^2$.

Anwendungsbeispiel zur Transformation: Wechselkursrisiko

Die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust ist

$$
\begin{aligned}
P(G(X) < 0) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 125\ 000}\ e^{-\frac{(y-300\ \ 000)^2}{2\cdot 125\ \ 000^2}} dy \\
&= F_{\mu,\sigma^2}(0) \qquad \text{mit} \quad \mu = 300\ 000, \quad \sigma^2 = 125\ 000^2
\end{aligned}
$$

Diesen Wert können wir mit Hilfe einer Tabelle für die Standardnormalverteilung bestimmen. (siehe unten)

In diesem Beispiel liegt eine lineare Transformation $g(x) = mx + b$ mit $m \neq 0$ vor. Die transformierte Zufallsvariable ist ebenso wie die Ausgangsvariable normalverteilt.

Lineare Transformation

Betrachte lineare Transformationsfunktion

$$g(x) = mx + b, \quad m \neq 0$$

Dann ist

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{m}(y - b), \;\; g'(x) = m \text{ und } g'(g^{-1}(y)) = m$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X, dann gilt:

$$f_{mX+b}(y) = f_X\left(\frac{1}{m}(y - b)\right)\,\frac{1}{|m|}$$

Lineare Transformation - Beispiel

X normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2:

$$
\begin{aligned}
f_{mX+b}(y) &= f_X\left(\frac{1}{m}(y-b)\right)\ \frac{1}{|m|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(\frac{1}{m}(y-b)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ \frac{1}{|m|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ |m|\ \sigma}\ e^{-\frac{(y-(m\mu+b))^2}{2m^2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

$mX+b$ ist also normalverteilt mit Mittelwert $m\mu+b$ und Varianz $m^2\sigma^2$.

Lineare Transformation

Für

$$m = \frac{1}{\sigma} \quad \text{und} \quad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

ist der Mittelwert 0 und die Varianz 1, $mX + b$ also standardnormalverteilt.

Damit gilt:

Ist X normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, so ist

$$\frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

Lineare Transformation

Damit ist

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Anwendung:
Aus einer Tabelle für Φ können die Werte der Verteilungsfunktion von X ermittelt werden.

Übungsaufgabe:
Gilt auch für eine exponentialverteilte Zufallsvariable, dass nach einer linearen Transformation wieder eine exponentialverteilte Zufallsvariable vorliegt?

zu Beispiel: Wechselkursrisiko

$G(X)$ normalverteilt mit $\mu = 100\ 000$ und $\sigma = 125\ 000$.

Wie hoch ist Wahrscheinlichkeit für Verlust?

$$\begin{aligned} P(G(X) < 0) &= P\left(\frac{G(X) - 100\ 000}{125\ 000} \leq \frac{0 - 100\ 000}{125\ 000}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{0 - 100\ 000}{125\ 000}\right) = \Phi(-0.8) \\ &= 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119 \end{aligned}$$

mit

$$(\Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8))$$

zu Beispiel: Wechselkursrisiko

Wie hoch ist der Gewinn mit 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens?

Gesucht: x mit $P(G(X) \geq x) = 0.95$

$P(G(X) \geq x) = 1 - P(G(X) \leq x) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(G(X) \leq x) = 0.05$

Gesucht: 0.05-Quantil von $G(X)$

$G(X)$ ist $\mathcal{N}(100\ 000, 125\ 000^2)$-verteilt

Gesucht: $q_{0.05}$ mit $\Phi(q_{0.05}) = 0.05$ oder $q_{0.95}$ mit $\Phi(q_{0.95}) = 0.95$ (Tabelle)

($\Phi(q_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \Phi(-q_\alpha) = 1 - \Phi(q_\alpha) = 1 - \alpha$: q_α α-Quantil
$\Rightarrow -q_\alpha$ $(1 - \alpha)$-Quantil)

zu Beispiel: Wechselkursrisiko

Hier

$$q_{0.95} = 1.645 \overset{Symmetrie}{\Longrightarrow} q_{0.05} = -1.645$$

Damit

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{G(X) - 100\ 000}{125\ 000} \leq -1.645\right) = 0.05 \\ \Leftrightarrow \quad & P(G(X) \leq -105625) \\ \Leftrightarrow \quad & P(G(X) \geq -105625) = 0.95 \end{aligned}$$

Beispiel

Die Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion ist damit

$$F_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \leq 0 \\ \alpha^2 & 0 < \alpha < 1 \\ 1 & 1 \leq \alpha \end{cases}$$

Gesucht ist die Dichte, die Verteilungsfunktion und der Erwartungswert von $\frac{1}{X}$.

Beispiel

A. Dichte und Verteilungsfunktion:

1. Möglichkeit:

$$
\begin{aligned}
& F_{g(X)}(\alpha) &=& \int_{g(X)\leq\alpha} f_X(x)dx \\
\alpha > 1: \quad & F_{\frac{1}{X}}(\alpha) &=& \int_{\frac{1}{X}\leq\alpha} f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} f_X(x)dx \\
& &=& \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} 2x\ dx = x^2\Big|_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = 1 - \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Bemerkung:

$$
\begin{aligned}
& X \quad \text{nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{X} \quad \text{nimmt nur Werte} > 1 \text{ an} \\
\Rightarrow \quad & F_{\frac{1}{X}}(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \leq 1 \\
& f_{\frac{1}{X}}(y) = 0 \quad \text{für} \quad y \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
F_{\frac{1}{X}}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{\alpha^2} & 1 < \alpha \end{cases}
\qquad
f_{\frac{1}{X}}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{2}{y^3} & 1 < y \end{cases}
$$

Beispiel

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{X}}(\alpha) &= P\left(\frac{1}{X} \leq \alpha\right) = P\left(\frac{1}{\alpha} \leq X\right) \\ &= 1 - P\left(X < \frac{1}{\alpha}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Beispiel

3. Möglichkeit:

Transformationsregel für Dichten

$$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \, \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

$$y = g(x) = \frac{1}{x}; \quad x \in (0,1); \quad g^{-1}(y) = \frac{1}{y} \quad \text{für} \quad y > 1$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \left|g'(g^{-1}(y))\right| = \frac{1}{(\frac{1}{y})^2} = y^2$$

Beispiel

$\underline{y > 1:}$

$$f_{\frac{1}{X}}(y) = 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2}{y^3}$$

$$f_{\frac{1}{X}}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{2}{y^3} & y > 1 \end{cases}$$

$\underline{\alpha > 1:}$

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{X}}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} f_{\frac{1}{X}}(y)\ dy = \int_{1}^{\alpha} \frac{2}{y^3}\ dy = -\frac{1}{y^2}\bigg|_1^{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha^2} \\ F_{\frac{1}{X}}(\alpha) &= \begin{cases} 0 & \alpha \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{\alpha^2} & \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel

B. Erwartungswert

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \ f_{\frac{1}{X}}(y) \ dy = \int_{1}^{\infty} y \ \frac{2}{y^3} \ dy \\ &= \int_{1}^{\infty} \frac{2}{y^2} \ dy = -\frac{2}{y}\Big|_{1}^{\infty} = 0 - (-2) = 2 \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f_X(x) \ dx = \int_{0}^{1} x \ 2x \ dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

Also $\quad E(\frac{1}{X}) \neq \frac{1}{E(X)}$

2. Möglichkeit:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{\frac{1}{X}}(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{\frac{1}{X}}(y)\ dy$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad dy = -\frac{1}{x^2}\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ f_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^2}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\ 2x\ dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\ dx$$

Allgemein für stetiges X:

$$
\begin{aligned}
E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \; f_{g(x)}(y) \; dy \\
& \quad y = g(x), \quad dy = |g'(x)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \; f_{g(x)}(g(x)) \; |g'(x)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \; f_X(x) \frac{1}{|g'(x)|} \; |g'(x)| dx \\
E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \; dx
\end{aligned}
$$

(Dies gilt auch, falls g keine Transformation ist.)

Analog für diskretes X:

X habe die Werte α_i, $\quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

$g(X)$ hat die Werte $g(\alpha_i)$, $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$, aber es gilt jetzt nicht notwendig $g(\alpha_i) \neq g(\alpha_j)$, $\quad i \neq j$

y_j, $\quad j = 1, 2, 3, \ldots$ Werte von $g(X)$, dann ist möglicherweise $y_j = g(\alpha_i)$ für mehrere α_i und damit

$$P(g(X) = y_j) = \sum_{\alpha_i:\ g(\alpha_i) = y_j} P(X = \alpha_i)$$

$$
\begin{aligned}
E(g(X)) &= \sum_{y_j} y_j \; P(g(X) = y_j) \\
&= \sum_{y_j} y_j \sum_{\alpha_i:\; g(\alpha_i)=y_j} P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{y_j} \sum_{\alpha_i:\; g(\alpha_i)=y_j} g(\alpha_i) \; P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{\alpha_i} g(\alpha_i) \; P(X = \alpha_i)
\end{aligned}
$$

Zusamenfassung

Sei X eine Zufallsvariable, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt:

- X diskret mit Werten α_i:

$$E(g(X)) = \sum_{\alpha_i} g(\alpha_i)\ P(X = \alpha_i)$$

- X stetig mit Dichte f_X:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\ dx$$

Bemerkungen:

- $E(g(X))$ muss nicht existieren.
- Aus der Existenz von $E(X)$ folgt nicht die Existenz von $E(g(X))$ und umgekehrt.

zu: Erwartungswert von $g(X)$

Beispiel:

X Anzahl der Fehler bei einem Produkt. X Poisson-verteilt mit Parameter λ. Bei 1 bis 9 Fehlern ist eine Nacharbeit erforderlich, die Kosten in Höhe von 20 unabhängig von der Anzahl der Fehler verursacht, bei mehr als 9 Fehlern muss das Teil verschrottet werden mit Kosten in Höhe von 300.

Wie hoch sind die erwarteten Kosten?

$$g(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 20 & k = 1, 2, \ldots, 9 \\ 300 & k \geq 10 \end{cases}$$

zu Erwartungswert von $g(X)$

$$
\begin{aligned}
E(g(X)) &= 0 \cdot P(g(X) = 0) + 20 \cdot P(g(X) = 20) + 300 \cdot P(g(X) = 300) \\
&= 0 \cdot P(g(X) = 0) + 20 \cdot P(X \in \{1, 2, \ldots, 9\}) + 300 \cdot P(X \geq 10) \\
&= 0 \cdot e^{-\lambda} + 20 \cdot \sum_{k=1}^{9} \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda} + 300 \cdot \sum_{k=10}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\ \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

zu Erwartungswert von $g(X)$

X stetig mit Dichte f_X. Dann gilt:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f_X(x)dx$$

Folgerungen:

1.) Mit $g(x) = mx + b$ gilt:

$$\begin{aligned} E(mX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (mx+b)\ f_X(x)dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = m\ E(X) + b \end{aligned}$$

(Analog im diskreten Fall.)

zu Erwartungswert von $g(X)$

2.) Mit $g(x) = (x - E(X))^2$ gilt:

$$\begin{aligned} E(g(X)) = E((X - E(X))^2) &= \sum_{i \in I} g(\alpha_i)\ P(X = \alpha_i) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha_i - E(X))^2\ P(X = \alpha_i) \\ &= Var\ (X) \end{aligned}$$

(Analog im stetigen Fall.)

zu Erwartungswert von $g(X)$

3.) Varianz von $g(x)$:

$$
\begin{aligned}
Var\ (mX+b) &= E((mX+b-E(mX+b))^2) \\
&= E((mX+b-m\ E(X)-b)^2) \\
&= E((m(X-E(X)))^2) \\
&= E(m^2(X-E(X))^2) \\
&= m^2\ E((X-E(X))^2) \\
&= m^2\ Var\ (X)
\end{aligned}
$$

4.) Standardisierung von X:

Damit kann jede Zufallsvariable X durch lineare Transformation in eine Zufallsvariable Y transformiert werden mit Erwartungswert 0 und Varianz 1:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{Var(X)}}\, x - \frac{E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{x - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

Bemerkung:

Der Typ der Verteilung bleibt bei der Transformation im Allgemeinen nicht(!) erhalten. Ausnahme: Normalverteilung.