Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel XIII - Funktion und Transformation mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Auswertung mehrerer Beobachtungen (z.B. bei einer Stichprobe mit Zurücklegen):

Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ - zur Verfügung stehende Information über eine unbekannte Größe (z.B. Messwerte, Zustand gut (0)/schlecht (1) bei Stichprobeneinheit)

- Auswertung: Anwendung einer Rechenvorschrift (Funktion g)
- Auswertungsergebnis: Funktionswert $g(x_1, \ldots, x_n)$
  z.B. arithmetisches Mittel, Spannweite, Median, Gini-Koeffizient, ...

$x_1, \ldots, x_n$ zufällig $\Rightarrow g(x_1, \ldots, x_n)$ zufällig.

Zufälligkeit erfasst man durch Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_n$ und deren Verteilungen. $x_1, \ldots, x_n$ sind Realisationen von $X_1, \ldots, X_n$.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Frage:
Wie kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Auswertungsergebnisses, also von $g(X_1, \ldots, X_n)$ aus den Verteilungen von $X_1, \ldots, X_n$ berechnet werden?

Beispiel:
Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ sind

- Realisationen von $X_1, \ldots, X_n$
- unabhängig
- normalverteilt mit μ und σ^2 (identisch)

Wie ist die Verteilung des arithmetischen Mittels $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ und der Stichprobenvarianz $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$?

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Gegeben: Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und Funktion $g(X_1, \ldots, X_n)$
Hinweis: Auf den folgenden Seiten des Kapitels werden, sofern nicht anders angemerkt, ausnahmslos Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachtet.

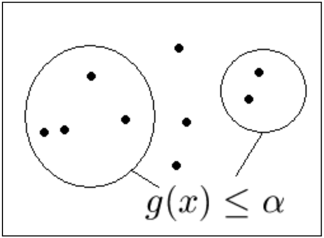
Gesucht: Verteilungsfunktion von $g(X_1, \ldots, X_n) = g(X)$

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= P(g(X_1, \ldots, X_n) \leq \alpha) \\ &= P\left((X_1, \ldots, X_n) \in \{(x_1, \ldots, x_n) | g(x_1, \ldots, x_n) \leq \alpha\}\right) \end{aligned}$$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ **diskret** mit Werten $x^{(r)} \in \mathbb{R}^n, r = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(g(X) \leq \alpha) = F(\alpha) = \sum_{r: g(x^{(r)}) \leq \alpha} P(X = x^{(r)})$$



Summation über die Wahrscheinlichkeiten der Punkte
(Werte $x^{(r)}$), die im Bereich $g(x) \leq \alpha$ liegen.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ **stetig** mit Dichtefunktion $f_X(x_1, \ldots, x_n)$ und Realisationen $x := (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Longrightarrow F(\alpha) = \underset{x : g(x) \leq \alpha}{\int \cdots \int} f_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Integration über den Teilbereich $g(x) \leq \alpha$ (auf x !).

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Bemerkung:

Falls die Berechnung der vollständigen Verteilung zu aufwendig oder zu schwierig ist, kann die Berechnung von Kennzahlen von $g(X_1, \ldots, X_n)$ versucht werden.

z.B. gilt:

$$E(g(X_1, \ldots, X_n)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Roulette (Beispiel 1)

Einsatz von 10 € fünfmal hintereinander auf das mittlere Drittel.

Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Auszahlung insgesamt, also der Summe der Auszahlungen?

Zufälliges Ergebnis bei einmaligem Durchlauf

$$X = \begin{cases} 0 & \text{Zahl } 0 \\ 1 & \text{1. Drittel} \\ 2 & \text{2. Drittel} \\ 3 & \text{3. Drittel} \end{cases}$$

Roulette (Beispiel 1)

Beispiel: Roulette

- $(y_1, \ldots, y_5)$: Ergebnisse bei den 5 Versuchen
- $(Y_1, \ldots, Y_5)$: zugehöriger Zufallsvektor
- Indikatorfunktion des zweiten Drittels:

$$\mathbb{1}_{\text{zweites Drittel}}(z) = \begin{cases} 1 & z = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Roulette (Beispiel 1)

- Pro "zweites Drittel": Auszahlung = 30€.
- Auszahlung bei $(y_1, \ldots, y_5)$:

$$g(y_1, \ldots, y_5) = \sum_{i=1}^{5} 30 \cdot \mathbb{1}_{\text{zweites Drittel}}(y_i)$$

- Werte von $g(y_1, \ldots, y_5)$: $0, 30, 60, 90, 120, 150$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung von $g(Y_1, \ldots, Y_5)$:

$$\begin{aligned} P(g(Y_1, \ldots, Y_5) = 150) &= P\left((Y_1, \ldots Y_5) = (2,2,2,2,2)\right) \\ &= \left(\frac{12}{37}\right)^5 = 0.324^5 = 0.0036 \end{aligned}$$

Roulette (Beispiel 1)

$P(g(Y_1, \ldots, Y_5) = 120):$

$(Y_1, \ldots, Y_5) =$	Wahrscheinlichkeit	$(Y_1, \ldots, Y_5) =$	Wahrscheinlichkeit
(0,2,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^4 \cdot \frac{1}{37}$	(2,2,3,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$
(1,2,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$	(2,2,2,0,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^4 \cdot \frac{1}{37}$
(3,2,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$	(2,2,2,1,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$
(2,0,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^4 \cdot \frac{1}{37}$	(2,2,2,3,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$
(2,1,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$	(2,2,2,2,0)	$\left(\frac{12}{37}\right)^4 \cdot \frac{1}{37}$
(2,3,2,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$	(2,2,2,2,1)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$
(2,2,0,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^4 \cdot \frac{1}{37}$	(2,2,2,2,3)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$
(2,2,1,2,2)	$\left(\frac{12}{37}\right)^5$		

Roulette (Beispiel 1)

Damit

$$
\begin{aligned}
P(g(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = 120) &= 5 \cdot \frac{1}{37}\left(\frac{12}{37}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{12}{37}\right)^5 \\
&= 5 \cdot \left(\frac{12}{37}\right)^4 \left(\frac{1}{37} + 2 \cdot \frac{12}{37}\right) \\
&= 5 \cdot \left(\frac{12}{37}\right)^4 \left(1 - \frac{12}{37}\right)
\end{aligned}
$$

Roulette (Beispiel 1)

Analog ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P(g(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = 90) &= \binom{5}{2}\left(\frac{12}{37}\right)^3\left(1-\frac{12}{37}\right)^2 \\
P(g(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = 60) &= \binom{5}{3}\left(\frac{12}{37}\right)^2\left(1-\frac{12}{37}\right)^3 \\
P(g(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = 30) &= 5 \cdot \frac{12}{37}\left(1-\frac{12}{37}\right)^4 \\
P(g(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = 0) &= \left(1-\frac{12}{37}\right)^5 .
\end{aligned}
$$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

<u>Generell</u>: Für den Erwartungswert $E(g(Y))$ der Funktion $g(Y)$ einer n-dimensionalen Zufallsvariable Y gilt:

Im **diskreten** Fall:

$$\circledast \quad E(g(Y_1, \ldots, Y_n)) = \sum_r g(y^{(r)}) \; P(Y = y^{(r)})$$

Im **stetigen** Fall:

$$\circledast \quad E(g(Y_1, \ldots, Y_n)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, \ldots, y_n) f_Y(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

Anwendungen:

- Erwartungswert einer Summe: siehe ▸ Folie 27
- Kovarianz einer Summe: siehe ▸ Folie 29

Spezielle Funktionen

Beispiele von Funktionen $X_1, \ldots, X_n$:

1. Summe : $\sum_{i=1}^{n} X_i$ und arithmetisches Mittel : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Maximum : $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$
3. Minimum : $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$
4. Spannweite (Range):

$$R(X_1, \ldots, X_n) = \max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

5. Produkt : $X_1 \cdot \cdots \cdot X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

1. Summe und arithmetisches Mittel

1. Summe und arithmetisches Mittel :

Auswertungsfunktion:

$$g(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n \qquad \text{bzw.} \qquad g(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sukzessive Bestimmung der Verteilung von
$g(Y_1,\dots,Y_n) = Y_1 + \dots + Y_n$:

- 1. Schritt: $Y_1 + Y_2$
- 2. Schritt: $(Y_1 + Y_2) + Y_3$

  $\vdots$

$\Longrightarrow$ Es genügt, den Fall $n = 2$ zu betrachten.

1. Summe und arithmetisches Mittel

$Y = (Y_1, Y_2)$ **diskret** mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeits-verteilung P_Y

$$P(Y_1 + Y_2 = k) = \sum_{i,j: i+j=k} P_Y(Y_1 = i, Y_2 = j)$$

Beispiel: Beim Würfeln mit zwei Würfeln sei Y_1 (Y_2) die Augenzahl beim ersten (zweiten) Würfel. Aus

$$P(Y_1 + Y_2 = k) = \sum_{\substack{i,j: i+j=k \\ i,j \in \{1,\ldots,6\}}} P(Y_1 = i, Y_2 = j) = \sum_{\substack{i,j: i+j=k \\ i,j \in \{1,\ldots,6\}}} \frac{1}{36}$$

folgt

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y_1 + Y_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

1. Summe und arithmetisches Mittel

$Y = (Y_1, Y_2)$ **stetig** mit gemeinsamer Dichtefunktion f_Y

$$F_{Y_1+Y_2}(\alpha) = \iint\limits_{y_1+y_2\leq\alpha} f_Y(y_1, y_2) dy_1 \; dy_2 = \iint\limits_{\substack{z\leq\alpha \\ y_1+y_2=z}} f_Y(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

$$= \iint\limits_{z\leq\alpha} f(y_1, \underbrace{z - y_1}_{y_2}) dy_1 \; dz$$

$$= \int\limits_{z\leq\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, z - y_1) dy_1 \; dz$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

$\Rightarrow$ Dichte von $Y_1 + Y_2$: **Faltungsintegral**

$$f_{Y_1+Y_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y_1, z - y_1)dy_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z - y_2, y_2)dy_2$$

Speziell: Y_1, Y_2 unabhängig mit Randdichten $f_1,\ f_2$:

$$\Rightarrow f_Y(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$$

$$f_{Y_1+Y_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y_1)f_2(z - y_1)dy_1$$

Beispiel 2: Faltung der Normalverteilung

Beispiel 2:

Y_1 und Y_2 seien unabhängig und standardnormalverteilt.

Dichte der Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \textit{(allg. Normalverteilung)}$$

$$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \textit{(Standardnormalverteilung)}$$

Beispiel 2: Faltung der Normalverteilung

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1+Y_2}(z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(z-y_1)\,dy_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-y_1)^2}\,dy_1 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}(z^2-2zy_1+y_1^2)}\,dy_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2+zy_1-\frac{z^2}{2}}\,dy_1 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2+zy_1-\frac{z^2}{4}} e^{-\frac{z^2}{4}}\,dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1-\frac{z}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\,dy_1}_{=1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2}}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Faltung der Normalverteilung

Als Ergebnis erhält man damit die Dichte einer Normalverteilung mit $\mu = 0, \sigma^2 = 2$, also $\mathcal{N}(0, 2)$.

$Y_1 + Y_2$ ist demnach normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 2.

Verallgemeinerung:

$$\left.\begin{array}{ll} Y_1 & \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) - \text{verteilt} \\ Y_2 & \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) - \text{verteilt} \end{array}\right\} \text{unabhängig}$$

$$\Rightarrow Y_1 + Y_2 \quad \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \text{verteilt}$$

Beispiel 2: Faltung der Normalverteilung

Folgerung: Y_i $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$- verteilt für $i = 1, \ldots, n$ und unabhängig

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right) \text{-verteilt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right) \text{-verteilt}$$

Daraus folgt:

$$\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu,\ \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2 : \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ ist } \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right) \text{-verteilt}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \ \ \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{-verteilt}$$

Beispiel 3: Faltung der Exponentialverteilung

Beispiel 3:

Y_1, Y_2 seien exponentialverteilt mit Parameter λ und unabhängig.

Für $z > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1+Y_2}(z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y_1) f_2(z - y_1) dy_1 \\
&= \int\limits_0^z \lambda e^{-\lambda y_1} \lambda e^{-\lambda(z-y_1)} dy_1 = \int\limits_0^z \lambda^2 e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda z} e^{\lambda y_1} dy_1 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int\limits_0^z dy_1 = \lambda^2 z e^{-\lambda z}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Faltung der Exponentialverteilung

Folgerung:

$Y_1 + Y_2$ nicht exponentialverteilt.

Übungsaufgabe: $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig, λ - exponentialverteilt

Wie lautet die Dichte von $Y_1 + \ldots + Y_n$ *?*

Hinweis: Ausrechnen für $n = 3, 4, 5$ und mit vollständiger Induktion fortführen.

1. Summe und arithmetisches Mittel

Kenngrößen einer Summe von Zufallsvariablen

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$E(\underbrace{Y_1 + \ldots + Y_n}_{g(Y)}) = \ ?$$

$$Var(\underbrace{Y_1 + \ldots + Y_n}_{g(Y)}) = \ ?$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

Folgerung 1 aus ⊛: (siehe ▸ Folie 14)

Erwartungswert einer Summe = Summe der Erwartungswerte ◎

$$
\begin{aligned}
E(Y_1 + \ldots + Y_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} (y_1 + \ldots + y_n) f_Y(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} y_i f_Y(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n \right)}_{f_{Y_i}(y_i) \ \textit{Randdichte von } Y_i} dy_i
\end{aligned}
$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(Y_1 + \ldots + Y_n) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i f_{Y_i}(y_i) dy_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \end{aligned}$$

Anwendung: Additivität der Kovarianz (siehe ▸ Folie 30)

Für Y **diskret**: analog

1. Summe und arithmetisches Mittel

Folgerung 2 aus $\circledast$: (siehe Folie 14)

Berechnung der Kovarianz von (Y_1, Y_2)

Es gilt: $Cov(Y_1, Y_2) = E[(Y_1 - E(Y_1))(Y_2 - E(Y_2))]$
Mit spezieller Funktion $g(Y_1, Y_2) = (Y_1 - E(Y_1))(Y_2 - E(Y_2))$ ist daher

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= E(g(Y_1, Y_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y_1 - E(Y_1))(y_2 - E(Y_2)) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Diskret: analog

1. Summe und arithmetisches Mittel

Folgerung aus ⊚: (siehe ▸ Folie 27)

Kovarianz ist additiv

Betrachte dazu: $Y_1 = X_1 + X_2$

$$
\begin{aligned}
& Cov(X_1 + X_2, Y) \\
= \quad & E\left[(X_1 + X_2 - \overbrace{E(X_1 + X_2)}^{=E(X_1)+E(X_2)})(Y - E(Y))\right] \\
= \quad & E\left[(X_1 - E(X_1) + X_2 - E(X_2))(Y - E(Y))\right] \\
= \quad & E\left[(X_1 - E(X_1))(Y - E(Y)) + (X_2 - E(X_2))(Y - E(Y))\right] \\
= \quad & E\left[(X_1 - E(X_1))(Y - E(Y))\right] + E\left[(X_2 - E(X_2))(Y - E(Y))\right] \\
= \quad & Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)
\end{aligned}
$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

Für die **Varianz einer Summe** folgt daraus:

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= Cov(X+Y,\ X+Y) \\
&= Cov(X,\ X) + Cov(X,Y) + Cov(Y,X) + Cov(Y,Y) \\
&= Cov(X,\ X) + 2 \cdot Cov(X,Y) + Cov(Y,Y) \\
&= Var(X) + 2Cov(X,Y) + Var(Y)
\end{aligned}
$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

Allgemein: $Y_1 = X_1 + \ldots + X_n$

1.) Kovarianz:

$$\begin{aligned}
& Cov(X_1 + \ldots + X_n, Y_2) \\
= \;& E\left[(X_1 + \ldots + X_n - E(X_1 + \ldots + X_n))(Y_2 - E(Y_2))\right] \\
= \;& E\left[(X_1 - E(X_1))(Y_2 - E(Y_2)) + (X_2 - E(X_2))(Y_2 - E(Y_2)) + \ldots \right. \\
& \left. + \, (X_n - E(X_n))(Y_2 - E(Y_2)\right] \\
= \;& E\left[(X_1 - E(X_1))(Y_2 - E(Y_2)\right] + \ldots + E\left[(X_n - E(X_n))(Y_2 - E(Y_2)\right] \\
= \;& Cov(X_1, Y_2) + \ldots + Cov(X_n, Y_2)
\end{aligned}$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

2.) Varianz:

Daraus folgt mit $Var(X) = Cov(X, X)$

$$\begin{aligned}
& Var(X_1 + \ldots + X_n) \\
= \; & Cov(X_1 + \ldots + X_n, X_1 + \ldots + X_n) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\
= \; & Cov(X_1, X_1) + \ldots + Cov(X_n, X_n) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} Cov(X_i, X_j) \\
= \; & Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) + 2 \sum_{j > i} Cov(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Im allgemeinen gilt **<u>nicht</u>**: *Varianz einer Summe gleich Summe der Varianzen*

1. Summe und arithmetisches Mittel

Aber: Wenn gilt

$$Cov(X_i, X_j) = 0, \text{ für alle } i \neq j \ ,$$

also "$X_1, \ldots, X_n$ sind paarweise unkorreliert"

$$\begin{aligned} \Rightarrow Var(X_1 + \ldots + X_n) &= Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) + 2 \sum_{j>i} \underbrace{Cov(X_i, X_j)}_{=0} \\ &= Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) \end{aligned}$$

Wichtiger Spezialfall: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig ($\Rightarrow$ unkorreliert)

1. Summe und arithmetisches Mittel

Wichtig für schließende Statistik:

Folgerung für eine Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen zu einer Zufallsvariablen X:

$$Y_1, \ldots, Y_n \text{ unabhängig und identisch verteilt wie } X$$

Dann gilt für das arithmetische Mittel:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = E(X) \\ Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) = \frac{n \cdot Var(X)}{n^2} = \frac{1}{n} Var(X) \end{aligned}$$

1. Summe und arithmetisches Mittel

Anwendung: Erwartungswert einer Summe

X, Y Zufallsvariable mit $P(X \leq Y) = 1$ ("$X \leq Y$ fast sicher")

$$\Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

Beweis: (unter Verwendung der Additivität des Erwartungswertes)

$$\begin{aligned} Z &= Y - X \\ P(Z < 0) &= 0 \Longrightarrow E(Z) \geq 0 \\ E(Z) &= E(Y) - E(X) \geq 0 \Longrightarrow E(Y) \geq E(X) \end{aligned}$$

2. Maximum von $Y_1, \ldots, Y_n$

2. Maximum von $Y_1, \ldots, Y_n$ **:**

$$g(Y_1, \ldots, Y_n) = \max_{i=1,\ldots,n} Y_i \qquad y_i \text{ realisierte Werte der } Y_i$$

Konstruktion der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F_{\max Y_i}(\alpha) &= P\left(\max_{i=1,\ldots,n} Y_i \leq \alpha\right) \\
&= P(Y_i \leq \alpha \text{ für } i = 1, \ldots, n) \\
&= F_{Y_1,\ldots,Y_n}(\alpha, \ldots, \alpha)
\end{aligned}$$

2. Maximum von $Y_1, \ldots, Y_n$

Spezialfälle für Maximum:

1.) $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig:

$$F_{\max Y_i}(\alpha) = F_{Y_1}(\alpha) \cdot \ldots \cdot F_{Y_n}(\alpha)$$

2.) $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X:

$$F_{\max Y_i}(\alpha) = F_X(\alpha) \cdot \ldots \cdot F_X(\alpha) = (F_X(\alpha))^n$$

$$(X \text{ stetig: } f_{\max Y_i}(\alpha) = nF_X(\alpha)^{n-1} f_X(\alpha))$$

2. Maximum von $Y_1, \dots, Y_n$

Beispiel:

“Parallelschaltung”:

- Ein Flugzeug ist mit zwei Triebwerken ausgestattet.
- T_1, T_2 Zeitdauer vom Anlassen des Motors bis zum ersten "Störfall" ("Lebensdauer")
- Ein Triebwerk genügt für Flug und Landung. Die Triebwerke arbeiten unabhängig. Ein Störfall ist nicht im Flug behebbar.

Überlebenswahrscheinlichkeit bei t Stunden Flugdauer:

$$
\begin{aligned}
P(T_1 > t \text{ oder } T_2 > t) &= 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) \\
&= 1 - P(\max\{T_1, T_2\} \leq t) \\
&= 1 - F_{T_1}(t) F_{T_2}(t)
\end{aligned}
$$

2. Maximum von $Y_1, \ldots, Y_n$

T_1, T_2 λ-exponentialverteilt

$$\begin{aligned} P(T_1 > t \text{ oder } T_2 > t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t}(2 - e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

Sei $\lambda = \frac{1}{24}$ $(E(T_1) = E(T_2) = 24)$, $t = 12$:

$$P(T_1 > t \text{ oder } T_2 > t) = e^{-\frac{12}{24}} \left(2 - e^{-\frac{12}{24}}\right) = 0.845$$

3. Minimum von $Y_1, \ldots, Y_n$

3. Minimum von $Y_1, \ldots, Y_n$ **:**

$$g(Y_1, \ldots, Y_n) = \min_{i=1,\ldots,n} Y_i \qquad y_i \text{ realisierte Werte der } Y_i$$

Konstruktion der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
F_{\min Y_i}(\alpha) &= P\left(\min_{i=1,\ldots,n} Y_i \leq \alpha\right) \\
&= 1 - P\left(\min_{i=1,\ldots,n} Y_i > \alpha\right) \\
&= 1 - P(Y_i > \alpha \text{ für } i = 1, \ldots, n) \\
&= 1 - P(Y_1 > \alpha, Y_2 > \alpha, \ldots, Y_n > \alpha)
\end{aligned}$$

3. Minimum von $Y_1, \ldots, Y_n$

Spezialfälle für Minimum:

1.) $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig:

$$F_{\min Y_i}(\alpha) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(Y_i > \alpha) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{Y_i}(\alpha))$$

2.) $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X:

$$F_{\min Y_i}(\alpha) = 1 - (1 - F_X(\alpha))^n$$

$$(X \text{ stetig: } f_{\min Y_i}(\alpha) = n(1 - F_X(\alpha))^{n-1} \cdot f_X(\alpha) \qquad)$$

Beispiel 4: Lebensdauer einer Anlage

Anwendungsbeispiel: Anlage mit n Komponenten.

- Anlage fällt aus, wenn eine der Komponenten ausfällt.
- T_i: Lebensdauer von Komponente i, exponentialverteilt mit Parameter λ_i

$\Longrightarrow$ $\min T_i$: Lebensdauer der Anlage

$$F_{\min T_i}(t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t)$$

"Überlebenswahrscheinlichkeit" für einen Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned} P(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t) &= P\left(\min_{i=1,\ldots,n} T_i > t\right) \\ &= 1 - P\left(\min_{i=1,\ldots,n} T_i \leq t\right) = 1 - F_{\min T_i}(t \end{aligned}$$

Beispiel 4: Lebensdauer einer Anlage

Wenn Ausfallverhalten der Komponenten unabhängig
($\Rightarrow\ T_1, \ldots, T_n$ unabhängig):

$$
\begin{aligned}
F_{\min T_i}(\alpha) &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{T_i}(\alpha)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - (1 - e^{-\lambda_i \alpha})) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i \alpha} = 1 - e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha}
\end{aligned}
$$

Also: $\min T_i$ exponentialverteilt mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. (nicht notwendig identisch)

"Überlebenswahrscheinlichkeit" für einen Zeitpunkt t:

$$
P(T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t) = e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i t}
$$

Beispiel 4: Lebensdauer einer Anlage

Spezielle Aspekte im Beispiel: $(P(\min T_i > t) = 1 - F_{\min T_i}(t))$

1.) Unabhängigkeit:

$$P\left(\min_{i=1,\ldots,n} T_i > t\right) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{T_i}(t))$$

2.) unabhängig und identisch verteilt:

$$P\left(\min_{i=1,\ldots,n} T_i > t\right) = (1 - F(t))^n$$

3.) unabhängig, identisch und $\lambda-$exponentialverteilt

$$P\left(\min_{i=1,\ldots,n} T_i > t\right) = e^{-n\lambda t}$$

$\Longrightarrow$ Lebensdauer exponentialverteilt mit Parameter $n\lambda$.

Beispiel 4: Lebensdauer einer Anlage

z.B.: $n = 5$

$$\lambda = 0.1 \; (E(T_i) = 10), \quad t = 8:$$

$$P(\min T_i > 8) = e^{-5 \cdot 0.1 \cdot 8} = e^{-4} \approx 0.02$$

$$\lambda = 0.05 \; (E(T_i) = 20), \quad t = 8:$$

$$P(\min T_i > 8) = e^{-5 \cdot 0.05 \cdot 8} = e^{-2} \approx 0.135$$

Übungsaufgabe:
Wie groß muss die mittlere Lebensdauer der Komponenten sein, damit in 8 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0.99 kein Störfall eintritt?

4. Spannweite

4. Spannweite:

$$R(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_1, \ldots, x_n\} - \min\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Berechnung der Verteilung in zwei Schritten:
a) gemeinsame Verteilung von $\max Y_i$ und $\min Y_i$
b) Verteilung von $X - Y = X + (-Y)$

Dann hat $R(Y_1, \ldots, Y_n)$ zu einer n-dimensionalen Zufallsvariablen $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Z_1 - Z_2$ mit

$$Z_1 = \max_{i=1,\ldots,n} Y_i \quad \text{und} \quad Z_2 = \min_{i=1,\ldots,n} Y_i$$

Es ist also die Verteilungsfunktion der <u>Differenz</u> zweier Zufallsvariablen zu bestimmen.

4. Spannweite

Dafür gilt im **diskreten** Fall

$$\begin{aligned} P(Z_1 - Z_2 = z) &= \sum_{\substack{x_i, y_j \\ x_i - y_j = z}} P(Z_1 = x_i, Z_2 = y_j) \\ &= \sum_{x_i} P(Z_1 = x_i, Z_2 = x_i - z) \end{aligned}$$

und im **stetigen** Fall

$$f_{Z_1 - Z_2}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_1 - \alpha) dz_1.$$

4. Spannweite

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Dichte von $\max Y_i$ und $\min Y_i$:

Diskreter Fall:

$$
\begin{aligned}
& P(\max Y_i \leq x, \min Y_i \leq y) \\
= \;& P(\max Y_i \leq x) - P(\max Y_i \leq x, \min Y_i > y) \\
= \;& P(Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) - P(y < Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

4. Spannweite

Fall 1: $y < x$

Bei Unabhängigkeit gilt:

$$
\begin{aligned}
(y < Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) &= \prod_{i=1}^{n} P(y \leq Y_i \leq x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (F_{Y_i}(x) - F_{Y_i}(y))
\end{aligned}
$$

Fall 2: $x \leq y$

$$P(y < Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) = 0$$

4. Spannweite

Damit

$$
\begin{aligned}
& P(\max Y_i \leq x, \min Y_i \leq y) \\
= \quad & \begin{cases} P(Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) & x \leq y \\ P(Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) - P(y \leq Y_i \leq x \text{ für } i = 1, \ldots, n) & x > y \end{cases}
\end{aligned}
$$

bei Unabhängigkeit

$$
= \quad \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} F_{Y_i}(x) & \text{für} \quad x \leq y \\ \prod_{i=1}^{n} F_{Y_i}(x) - \prod_{i=1}^{n} (F_{Y_i}(x) - F_{Y_i}(y)) & \text{für} \quad x > y \end{cases}
$$

Beispiel 5 (2 Würfel)

Beim Werfen mit zwei Würfeln erhält man für das Maximum (Minimum) der Augenzahlen die Verteilung :

z	1	2	3	4	5	6
$P(\max\{Y_1, Y_2\} = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
$P(\max\{Y_1, Y_2\} \leq z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{25}{36}$	1
$P(\min\{Y_1, Y_2\} = z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(\min\{Y_1, Y_2\} \leq z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{35}{36}$	1

Beispiel 5 (2 Würfel)

$\max\{Y_1, Y_2\} =$ $\min\{Y_1, Y_2\} =$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$					
2		$\frac{1}{36}$				
3			$\frac{1}{36}$		$\frac{2}{36}$	
4				$\frac{1}{36}$		
5		0			$\frac{1}{36}$	
6						$\frac{1}{36}$

Beispiel 5 (2 Würfel)

Die gemeinsame Verteilung ist: $P(\max Y_i \leq x, \min Y_i \leq y)$

$\max\{Y_1, Y_2\} \leq$ $\min\{Y_1, Y_2\} \leq$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
2		$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
3			$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
4				$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$
5					$\frac{25}{36}$	$\frac{35}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{25}{36}$	1

Beispiel 5 (2 Würfel)

Damit erhält man als Verteilung der Spannweite R

$$P(R = k) = \sum_{i=k+1}^{6} P(\max\{Y_1, Y_2\} = i, \min\{Y_1, Y_2\} = i - k)$$

k	0	1	2	3	4	5
$P(R = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

Beispiel 6 (Gleichverteilung auf $[0,1]$)

Dichte von X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin [0,1] \\ 1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

Verteilungsfunktion von X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Beispiel 6 (Gleichverteilung auf $[0, 1]$)

$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ Stichprobe mit Zurücklegen zu X.

Gemeinsame Dichte von max $Y_i(x)$ und min $Y_i(y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq y \\ n(n-1)(x-y)^{n-2} & \text{für} \quad 0 \leq y < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Ansatz: Über Verteilungsfunktion von max Y_i und min Y_i)

Beispiel 6 (Gleichverteilung auf $[0, 1]$)

Dichte der Spannweite:

$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \leq 0 \\ \int_z^1 n(n-1)(x-(x-z))^{n-2}dx & \text{für} \quad 0 < z < 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \leq 0 \\ n(n-1)z^{n-2}(1-z) & \text{für} \quad 0 < z < 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq z \end{cases}$$

Beispiel 6 (Gleichverteilung auf $[0,1]$)

Erwartungswert von R:

$$
\begin{aligned}
E(R) &= \int_0^1 zn(n-1)z^{n-2}(1-z)dz \\
&= n(n-1)\int_0^1 (z^{n-1}-z^n)dz \\
&= n(n-1)\left[\left(\frac{z^n}{n}-\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^1 \\
&= n-1-\frac{n(n-1)}{n+1} = \frac{n^2-1-n^2+n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}
\end{aligned}
$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$:

Auswertungsfunktion:

$$g(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

zufälliges Ergebnis:

$$\prod Y_i = g(Y_1, \ldots, Y_n) = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

Verteilungsfunktion von $\prod Y_i$:

$$F_{\prod Y_i}(\alpha) = P((Y_1, \ldots, Y_n) \in \{(x_1, \ldots, x_n) | \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \alpha\})$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ **diskret**:

Wertekombinationen $y^{(j)} \in \mathbb{R}^n, y^{(j)} = y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}$,

$$F_{\prod Y_i}(\alpha) = \sum_{y^{(j)} \text{ mit } \prod_{i=1}^n y_i^{(j)} \leq \alpha} P(Y = y^{(j)})$$

$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ **stetig** mit Dichte f_Y:

$$F_{\prod Y_i}(\alpha) = \int \cdots \int_{y_1, \ldots, y_n: \ y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \leq \alpha} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

X, Y **diskrete Zufallsvariablen:**

$\underline{z \neq 0}$:

$$P(X \cdot Y = z) = \sum_{x_i \neq 0} P(X = x_i, Y = \frac{z}{x_i})$$

$\underline{z = 0}$:

$$\begin{aligned} P(X \cdot Y = 0) &= 1 - P(X \cdot Y \neq 0) \\ &= 1 - P(X \neq 0, Y \neq 0) \quad \textit{(allgemein)} \\ &= 1 - P(X \neq 0) P(Y \neq 0) \quad \textit{(X, Y unabhängig)} \end{aligned}$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

X, Y **stetige Zufallsvariablen:**

$$
\begin{aligned}
F_{X \cdot Y}(\alpha) &= \iint\limits_{x \cdot y \leq \alpha} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int\limits_{x \cdot y \leq \alpha} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{-\infty}^{0} \left(\int\limits_{x \cdot y \leq \alpha} f(x,y)\,dx \right) dy
\end{aligned}
$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

$$
\begin{aligned}
y > 0 \quad &: \quad xy \leq \alpha \Leftrightarrow x \leq \frac{\alpha}{y} \\
(y = 0 \quad &: \quad xy \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0 \quad \text{ohne Bedeutung, da } P(Y = 0) = 0) \\
y < 0 \quad &: \quad xy \leq \alpha \Leftrightarrow x \geq \frac{\alpha}{y}
\end{aligned}
$$

$$
F_{X \cdot Y}(\alpha) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{y}} f(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{\alpha}{y}}^\infty f(x,y)dxdy
$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

Substitution:

$$z = x \cdot y,\ x = \frac{z}{y},\ dx = \frac{1}{y} dz$$

Integrationsgrenzen:

$$\underline{y > 0} \quad : \quad x \leq \frac{\alpha}{y} \Leftrightarrow \frac{z}{y} \leq \frac{\alpha}{y} \Leftrightarrow z \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{y}} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(\frac{z}{y}, y)\frac{1}{|y|}dz$$

$$\underline{y < 0} \quad : \quad x \geq \frac{\alpha}{y} \Leftrightarrow \frac{z}{y} \geq \frac{\alpha}{y} \Leftrightarrow z \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\alpha}{y}}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(\frac{z}{y}, y)\frac{1}{|y|}dz$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

$$F_{XY}(\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dz dy + \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dz dy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dy dz$$

Dichtefunktion:

$$f_{XY}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\alpha}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dy$$

Wenn X, Y **unabhängig:**

$$f_{XY}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{\alpha}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{|y|} dy$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

Bei Unabhängigkeit:

$$
\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yx \overbrace{f_X(x) f_Y(y)}^{f_{(X,Y)}(x,y)} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}_{E(X)} dy \\
&= E(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy}_{E(Y)} \\
&= E(X) \cdot E(Y)
\end{aligned}
$$

5. Produkt von $Y_1, \ldots, Y_n$

Generell: Es gilt für die **Kovarianz**

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\
&= E(XY - E(X)\cdot Y - X\cdot E(Y) + E(X)\cdot E(Y)) \\
&= E(XY) - E(E(X)Y) - E(X\cdot E(Y)) + E(E(X)\cdot E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)\cdot E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)\cdot E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Also:

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$ bzw. $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y) + Cov(X,Y)$

Damit:

$$Cov(X,Y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \; E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

Aufgabe: Beschaffung des notwendigen Produktionsmaterials (Rohstoffe, Bauteile, Betriebstoffe)

Ziel: Hohe Versorgungssicherheit bei niedrigen Kosten.

Bestellpunktverfahren: Bei Unterschreiten des Lagerbestands s wird eine Bestellung ausgelöst, die nach Ablauf der Lieferfrist verfügbar ist.

Problem: Lieferzeit und Bedarf während der Lieferzeit nicht determiniert.

Beispiel 7 (Materialdisposition)

Vorgabe: 95% Versorgungssicherheit

Aufgabe: Festlegung von s

Y: täglicher Bedarf
Z: Dauer der Lieferzeit

Gesamtbedarf während der Lieferzeit:

$$X = Y \cdot Z$$

Gesucht: s mit

$$P(Y \cdot Z \leq s) = 0.95$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

Y, Z stetig und unabhängig $\Longrightarrow$ Dichtefunktion von $X = YZ$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y, \frac{x}{y}\right) \frac{1}{|y|} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_Z\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{|y|} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \cdot Z \leq s) &= P(X \leq s) \\ &= \int_{-\infty}^{s} f_X(x) dx \qquad \text{“Liefersicherheit”} \end{aligned}$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

- Bedarf Y gleichverteilt auf $[8, 12]$
- Dauer Z gleichverteilt auf $[3, 5]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 \leq y \leq 12 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 3 \leq z \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

Somit:

$$f_X(x) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_Z\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{|y|} dy$$

$f_X(x) \neq 0$ für $y \in [8, 12]$ und $\frac{x}{y} \in [3, 5]$
$\frac{x}{y} \in [3, 5] \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq \frac{x}{y} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{5} \leq y \leq \frac{x}{3}$

$$f_X(x) = \int\limits_{\max\{\frac{x}{5}, 8\}}^{\min\{\frac{x}{3}, 12\}} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{1}{8} \left[\ln(y)\right]_{\max\{\frac{x}{5}, 8\}}^{\min\{\frac{x}{3}, 12\}}$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

$$
\begin{array}{lll}
x < 24: & \frac{x}{3} < 8 = \max\{\frac{x}{5}, 8\} & \Rightarrow f_X(x) = 0 \\
24 \leq x < 36 & 12 > \frac{x}{3} \geq 8 = \max\{\frac{x}{5}, 8\} & \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{8}\ln\frac{x}{3} - \frac{1}{8}\ln 8 \\
36 \leq x \leq 40 & \frac{x}{3} \geq 12, \quad \max\{\frac{x}{5}, 8\} = 8 & \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{8}\ln 12 - \frac{1}{8}\ln 8 \\
40 < x \leq 60 & \frac{x}{3} \geq 12, \quad \max\{\frac{x}{5}, 8\} = \frac{x}{5} \leq 12 & \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{8}\ln 12 - \frac{1}{8}\ln\frac{x}{5} \\
x > 60: & \frac{x}{5} > 12 & \Rightarrow f_X(x) = 0
\end{array}
$$

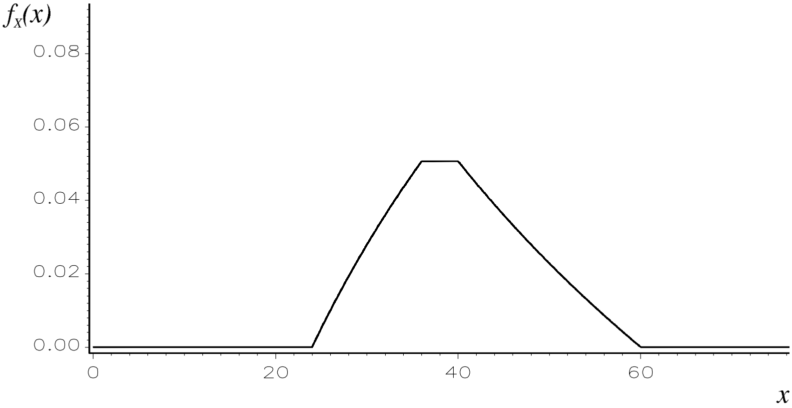
Beispiel 7 (Materialdisposition)

Also:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 24 \\ \frac{1}{8}(\ln \frac{x}{3} - \ln 8) & 24 \leq x \leq 36 \\ \frac{1}{8}(\ln 12 - \ln 8) & 36 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{8}(\ln 12 - \ln \frac{x}{5}) & 40 \leq x \leq 60 \\ 0 & 60 \leq x \end{cases}$$

In der folgenden Abbildung ist die Dichtefunktion des Bedarfs X während der Lieferzeit dargestellt.

Beispiel 7 (Materialdisposition)



Dichtefunktion des Bedarfs während der Lieferzeit

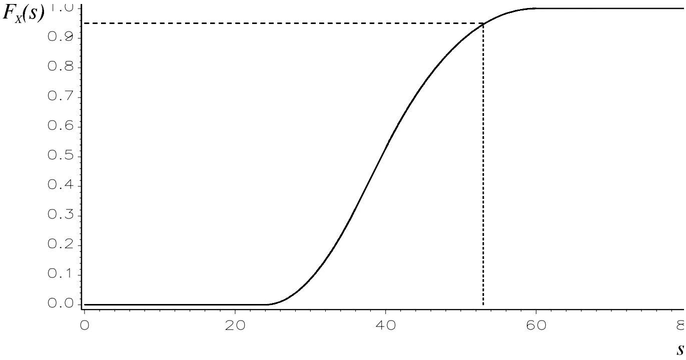
Beispiel 7 (Materialdisposition)

Als Verteilungsfunktion erhält man nach einiger Rechnung (Stammfunktion von $\ln x$ ist $x \cdot \ln(x) - x$)

$$F_X(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 24 \\ \frac{s}{8}(\ln \frac{s}{24} - 1) + 3 & 24 \leq s \leq 36 \\ \frac{s}{8} \ln 1.5 - 1.5 & 36 \leq s \leq 40 \\ \frac{s}{8}(\ln \frac{60}{s} + 1) - 6.5 & 40 \leq s \leq 60 \\ 1 & 60 \leq s \end{cases}$$

Wie aus folgender Abbildung ersichtlich, ist bei einer vorgegebenen Liefersicherheit von 0.95 also bei einem Lagerbestand von $s \approx 53$ eine Bestellung auszulösen.

Beispiel 7 (Materialdisposition)



Liefersicherheit $P(X \leq s)$ in Abhängigkeit von s.

Beispiel 7 (Materialdisposition)

Jetzt: Y und Z anders verteilt

- Y gleichverteilt auf $[7, 10]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 7 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Z "Dreieck" - verteilt

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(z-1) & 1 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) f_Y(\frac{x}{z}) \frac{1}{|z|} dz \quad \text{mit}$$

- $f_Z(z) \geq 0$ für $1 \leq z \leq 3$
- $f_Y(\frac{x}{z}) \geq 0$ für $7 \leq \frac{x}{z} \leq 10$ oder $\frac{x}{10} \leq z \leq \frac{x}{7}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow f_X(x) &= \int\limits_{\max\{1, \frac{x}{10}\}}^{\min\{3, \frac{x}{7}\}} (1 - \frac{1}{2}(z-1)) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} dz \\
&= \int (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z}) dz = \left[(\frac{1}{2} \ln z - \frac{1}{6} z) \right]_{\max\{1, \frac{x}{10}\}}^{\min\{3, \frac{x}{7}\}}
\end{aligned}$$

Beispiel 7 (Materialdisposition)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 7 \\ \frac{1}{2}\ln\frac{x}{7} - \frac{x}{42} + \frac{1}{6} & 7 \le x \le 10 \\ \frac{1}{2}\ln\frac{x}{7} - \frac{x}{42} - \frac{1}{2}\ln\frac{x}{10} + \frac{x}{60} = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{7} - \frac{x}{140} & 10 \le x \le 21 \\ \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{x}{10} + \frac{x}{60} & 21 \le x \le 30 \\ 0 & 30 < x \end{cases}$$

Verteilungsfunktion ausrechnen und $F(s) = 0.95$ setzen ergibt s.
(Quantil)

Transformationen

Zur n-dimensionalen Zufallsvariablen $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wird untenstehende Abbildung betrachtet

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$Y = g(X)$ ist also auch wieder eine n-dimensionale Zufallsvariable.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass es sich bei g um eine eindeutig umkehrbare Abbildung handelt.

D.h. es existiert ein $g^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $g^{-1}(g(x)) = x$ bzw. $y = g(g^{-1}(y))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $y \in \mathbb{R}^n$.

Transformationen

Bemerkung:

Nimmt X nur Werte in einem Bereich D an, muss g auch nur für D definiert sein.

$$\begin{aligned} g &: D \to W \\ g^{-1} &: W \to D \; ; \quad D, W \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Transformationen

Gesucht: Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Dichtefunktion von Y.

- X **diskret**:

  Zu jedem Wert y von $g(X_1, \ldots, X_n)$ gibt es genau ein x mit $g(x) = y$ und es gilt

  $$P(g(X_1, \ldots, X_n) = y = g(x)) = P(X = x)$$

Transformationen

- X **stetig**:

  Wiederholung: eindimensional ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

  $$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

  benutzt Ableitung von g.

Transformationen

Einschub: Ableitung von $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$$

Ableitung von Komponente $g_i(x_1 \dots, x_n)$ nach Variable x_j

$$\frac{\partial g_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

partielle Ableitung

$i, j = 1, \dots, n$

Transformationen

Anordnung aller partiellen Ableitungen aller Komponenten in einer Matrix:

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobi - Matrix

Transformationen

Zunächst:

Verteilungsfunktion von $g(X)$ an der Stelle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\begin{aligned} F_{g(Y)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \int\limits_{-\infty}^{\alpha_n} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\alpha_1} f_{g(X)}(y) dy_1 \ldots dy_n \\ &= \int \cdots \int\limits_{t: g(t) \leq \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} f_X(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n \end{aligned}$$

Transformationen

Nach Transformationsregel für Integrale:

$$F_{g(X)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha_n} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\alpha_1} f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\frac{1}{|det(g'(g^{-1}(y)))|}}_{\circledast} dy_1 \ldots dy_n$$

$\circledast$: Determinante der Jacobi-Matrix an der Stelle $g^{-1}(y)$

Daraus Dichtefunktion von $g(Y)$:

$$f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{|det(g'(g^{-1}(y)))|}\ , \quad y \in W$$

Transformationen

Zusammenfassung:

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine stetige n-dimensionale Zufallsvariable mit Dichte f_X.

$D, W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $P(X \in D) = 1$ und $g : D \to W$ umkehrbar mit Umkehrfunktion $g^{-1} : W \to D$

g und g^{-1} auf D bzw. W differenzierbar.

Dann ist:

$$f_{g(X)}(y) = \begin{cases} f_Y(g^{-1}(y)) \frac{1}{|det(g'(g^{-1}(y)))|} & \text{für} \quad y \in W \\ 0 & \text{für} \quad y \notin W \end{cases}$$

Dichtefunkton der transformierten Zufallsvariablen $g(X)$.

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

1.) <u>Dichte eines **Produktes**</u>:

X_1, X_2 stetige Zufallsvariable, gesucht ist Verteilung von $X_1 \cdot X_2$

Transformation:

$$g(X_1, X_2) = (X_1 \cdot X_2, X_2)$$

g ist invertierbar: $x_1 \cdot x_2 = y_1 \to x_1 = \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ für $y_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} g^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \\ g'(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

Weiter:

$$g'(g^{-1}(y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} y_2 & \frac{y_1}{y_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Jacobi-Matrix}$$

$$det(g'(g^{-1}(y_1, y_2))) = y_2 \qquad \textit{Determinante der Jacobi-Matrix}$$

Dichte von $g(X_1, X_2)$:

$$f_{g(X_1,X_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1,X_2)}(g^{-1}(y_1, y_2))\frac{1}{|y_2|}, \quad y_2 \neq 0$$

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

Randdichte der 1. Komponente: $(g(X_1, X_2) = (\underline{X_1 \cdot X_2}, X_2))$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1 \cdot X_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{g(X_1,X_2)}(z, y_2) dy_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(g^{-1}(z, y_2)) \frac{1}{|y_2|} dy_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}\left(\left(\frac{z}{y_2}, y_2\right)\right) \frac{1}{|y_2|} dy_2
\end{aligned}
$$

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

2.) Dichte eines **Quotienten**:

X_1, X_2 stetige Zufallsvariable, gesucht ist Verteilung von $\frac{X_2}{X_1}$

Transformation:

$$g(X_1, X_2) = (\frac{X_2}{X_1}, X_2)$$

Damit: $y_1 = \frac{x_2}{x_1}$, $y_2 = x_2$, $x_1 = \frac{x_2}{y_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $y_1 \neq 0$

Setze $g(x_1, x_2) = (\frac{x_2}{x_1}, x_2)$ für $x_1 \neq 0$, und $g(0, x_2) = (0, x_2)$, so dass $(y_1, y_2) = (\frac{x_2}{x_1}, x_2)$

$\Longrightarrow g$ invertierbar ($y_1 \neq 0$ bzw. $x_2 \neq 0$) für $x_1 \neq 0$ (s.o.)

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\frac{y_2}{y_1}, y_2\right) \text{ für } y_1 \neq 0 \\
g'(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
g'(g^{-1}(y_1, y_2)) &= \begin{pmatrix} -\frac{y_1^2}{y_2} & \frac{y_1}{y_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
det(g'(g^{-1}(y_1, y_2))) &= -\frac{y_1^2}{y_2}
\end{aligned}
$$

und damit die Dichtefunktion von Y:

$$
f_{g(X_1,X_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1,X_2)}(g^{-1}(y_1, y_2))\frac{|y_2|}{y_1^2} = f_{(X_1,X_2)}\left(\frac{y_2}{y_1}, y_2\right)\frac{|y_2|}{y_1^2}
$$

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

Dichte des Quotienten ist Randdichte der 1. Komponente:

$$\begin{aligned} f_{\frac{Y_2}{Y_1}}(z) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{g(X_1,X_2)}(z, y_2)dy_2 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y\left(\frac{y_2}{z}, y_2\right)\frac{|y_2|}{z^2}dy_2 \end{aligned}$$

Beispiel 8 (Anwendung bei Funktionen)

Substitution: $y_2 = zx \ , \quad x = \frac{y_2}{z} \ , \quad dy_2 = zdx$

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y_2}{Y_1}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x, zx) \frac{|zx|}{z^2} |z| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x, zx) |x| dx
\end{aligned}
$$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

Lebensdauer $T =$ Zeit vom Einschalten bis zum Eintritt einer Störung

zufällig: Beschreibbar durch Zufallsvariable

T exponentialverteilt mit Parameter λ

„kalte Reserve": Zweite Einheit steht bereit, um die erste zu ersetzen

$$\left.\begin{array}{ll} T_1 & \text{Lebensdauer 1. Einheit} \\ T_2 & \text{Lebensdauer 2. Einheit} \end{array}\right\} T_1 + T_2 \text{ Gesamtlebensdauer.}$$

Frage: Welchen Anteil an der Gesamtdauer hat die 1. Einheit?

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

T_1 und T_2 sind Zufallsvariable

$\frac{T_1}{T_1+T_2}$ = Anteil von T_1 an $T_1 + T_2$

Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich für $\frac{T_1}{T_1+T_2}$?

1. Berechnungsmöglichkeit:

i.) W-verteilung von $T_1 + T_2$

ii.) W-verteilung von $\frac{1}{T_1+T_2}$

iii.) W-verteilung von $T_1 \cdot \frac{1}{T_1+T_2}$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

2. Berechnungsmöglichkeit:

Transformation $g(X_1, X_2) = \left(\frac{X_1}{X_1+X_2}, X_2\right)$

Daraus:

i.) Dichte von $g(T_1, T_2)$

ii.) Randdichte von Komponente 1 von $g(T_1, T_2)$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

T_1, T_2 unabhängig und λ-exponentialverteilt

Transformation:

$$(Y_1, Y_2) = g(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1 + x_2}, x_2) \qquad x_1, x_2 > 0$$

angewandt auf (T_1, T_2)

Inverse Abbildung:

$$(X_1, X_2) = g^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{y_1 \cdot y_2}{1 - y_1}, y_2) \quad 0 < y_1 < 1; 0 < y_2$$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

Jacobi - Matrix:

$$g'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & -\frac{x_1}{(x_1+x_2)^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante der Jacobi - Matrix:

$$|det\ g'(x_1, x_2)| = \frac{|x_2|}{(x_1 + x_2)^2}$$

Aus $(x_1, x_2) = g^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{y_1 y_2}{1-y_1}, y_2)$ folgt:

$$|det\ g'(g^{-1}(y_1, y_2))| = \frac{|y_2|}{(\frac{y_1 y_2}{1-y_1} + y_2)^2} = \frac{|y_2|}{(\frac{y_1 y_2 + y_2 - y_1 y_2}{1-y_1})^2} = \frac{(1 - y_1)^2}{|y_2|}$$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

Gemeinsame Dichte von T_1, T_2 (T_1, T_2 unabhängig):

$$
\begin{aligned}
f_{T_1,T_2}(x_1,x_2) &= \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} & x_1, x_2 > 0 \\
f_{g(T_1,T_2)}(y_1,y_2) &= \lambda^2 e^{-\lambda(\frac{y_1 y_2}{1-y_1}+y_2)} \frac{y_2}{(1-y_1)^2} & 0 < y_1 < 1;\ 0 < y_2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda\cdot\frac{y_2}{1-y_1}} \frac{y_2}{(1-y_1)^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

Randverteilung der 1. Komponente

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{T_1}{T_1+T_2}}(y_1) &= \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda\cdot\frac{y_2}{1-y_1}} \frac{y_2}{(1-y_1)^2}\,dy_2\ , \quad 0 < y_1 < 1 \\
&= \frac{\lambda}{(1-y_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda}{1-y_1} e^{-\lambda\frac{y_2}{1-y_1}}}_{\circledast} y_2\,dy_2 \\
&= \frac{\lambda}{1-y_1} E(Y) = \frac{\lambda}{1-y_1} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda}{1-y_1}} = 1
\end{aligned}
$$

$\circledast$: Dichte einer ZV Y, exponentialverteilt mit $\frac{\lambda}{1-y_1}$

Beispiel 9 (Störanfällige Komponente)

Also:

$$f_{\frac{T_1}{T_1+T_2}}(y_1) = 1 \quad \text{für} \;\; 0 < y_1 < 1$$

Der Anteil ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.