Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel XII - Kennzahlen mehrdimensionaler Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

$X = (X_1, \cdots, X_k)$ k - dimensionale ZV ist Zufallsvektor

Kennzahlen:

1.) für einzelne Komponenten
2.) zur Analyse des Zusammenhangs

1. Komponentenweise

a) Erwartungswert
- über Randverteilung
- direkt

b) Varianz
- über Randverteilung
- direkt

1. Komponentenweise

Erwartungswert für: $X = (X_1, \cdots, X_k)$

Für jede Komponente X_i ist der Erwartungswert, wenn er existiert, eine Kennzahl für die Lage der Verteilung.

X **diskret:** $\Rightarrow X_i$ diskret mit Werten $x_{ij}, j \in J_i$

$$E(X_i) = \sum_{j \in J_i} x_{ij} \cdot \underbrace{P(X_i = x_{ij})}_{Randverteilung}, \quad \text{für jedes } i$$

X diskret:

$$P(X_i = x_{ij}) \quad = \underbrace{\sum_{t \neq i} \sum_{s \in J_t} P(X_i = x_{ij}, X_t = x_{ts} \ \text{ für } \ t \neq i)}_{\textit{Aufsummieren von Wahrscheinlichkeiten}}$$

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \sum_{j \in J_i} x_{ij} \cdot \Big(\sum_{t \neq i} \sum_{s \in J_t} P(X_i = x_{ij}, X_t = x_{ts} \ \text{ für } \ t \neq i)\Big) \\ &= \sum_{j \in J_i} \sum_{t \neq i} \sum_{s \in J_t} x_{ij} P(X_i = x_{ij}, X_t = x_{ts} \ \text{ für } \ t \neq i) \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise:

X habe Werte $x^{(r)} \in \mathbb{R}^k$, $\quad x^{(r)} = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)})$

$$E(X_i) = \sum_r x_i^{(r)} P(X = x^{(r)})$$

oder

$$\begin{aligned} E(X) &= (E(X_1), \cdots, E(X_k)) \\ &= \sum_r x^{(r)} P(X = x^{(r)}) \end{aligned}$$

Beispiel zu 1.)

$X = (X_1, X_2, X_3)$ mit

X_1 habe die Werte 1,2,3,4

X_2 habe die Werte 0,1

X_3 habe die Werte 1,2

Beispiel - Wahrscheinlichkeitsverteilung

X_3=1:

		$X_1 =$				
		1	2	3	4	
$X_2 =$	0	0.2	0.1	0.1	0.05	0.45
	1	0.01	0.02	0.02	0.01	0.06
		0.21	0.12	0.12	0.06	0.51

X_3=2:

		$X_1 =$				
		1	2	3	4	
$X_2 =$	0	0.1	0.1	0.15	0.1	0.45
	1	0.005	0.01	0.02	0.005	0.04
		0.105	0.11	0.17	0.105	0.49

Beispiel - Randverteilung und Erwartungswert

X_1 :

$P(X_1 = \cdot)$ 1	2	3	4	$E(X_1)$
$P(X_1 = 1)$ $= 0.315$	$P(X_1 = 2)$ $= 0.23$	$P(X_1 = 3)$ $= 0.29$	$P(X_1 = 4)$ $= 0.165$	$1 \cdot P(X_1 = 1) + \ldots + 4 \cdot P(X_1 = 4)$ $= 2.305$

Analog:

X_2 :

$P(X_2 = \cdot)$ 0	1	$E(X_2)$
0.9	0.1	0.1

X_3 :

$P(X_3 = \cdot)$ 1	2	$E(X_3)$
0.51	0.49	1.49

Randverteilung und Erwartungswert

Äquivalent:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= (1,0,1) \cdot \overbrace{0.2}^{P(X=(1,0,1))} + (1,0,2) \cdot \overbrace{0.1}^{P(X=(1,0,2))} \\
&\quad +(2,0,1) \cdot 0.1 + (2,0,2) \cdot 0.1 \\
&\quad +(3,0,1) \cdot 0.1 + (3,0,2) \cdot 0.15 \\
&\quad +(4,0,1) \cdot 0.05 + (4,0,2) \cdot 0.1 \\
&\quad +(1,1,1) \cdot 0.01 + (1,1,2) \cdot 0.005 \\
&\quad +(2,1,1) \cdot 0.02 + (2,1,2) \cdot 0.01 \\
&\quad +(3,1,1) \cdot 0.02 + (3,1,2) \cdot 0.02 \\
&\quad +(4,1,1) \cdot 0.01 + (4,1,2) \cdot 0.005 \\
&= (1.05, 0.06, 0.51) + (1.255, 0.04, 0.98) \\
&= (2.305, 0.1, 1.49)
\end{aligned}
$$

X stetig:

$$E(X_i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i f_{x_i}(x_i) dx_i$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k dx_i$$

In Vektorschreibweise:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_1, \dots, x_k) f_X(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Varianz und höhere Momente:

Berechnung Komponentenweise:

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

Vektorschreibweise nicht sinnvoll, da missverständlich. Denn sei X Vektor

$$X^2 = \underbrace{(X_1, \ldots, X_n)^2}_{\textit{Skalarprodukt}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{und nicht} \quad (X_1^2, \ldots, X_n^2)$$

Beispiel zu 1.) - Varianz

- über Randverteilung:

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= 0.315 + 4 \cdot 0.23 + 9 \cdot 0.29 + 16 \cdot 0.165 = 6.485 \\ \Longrightarrow Var(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 6.485 - 2.305^2 = 1.172 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_2^2) &= 0.1 \\ \Longrightarrow Var(X_2) &= 0.1 - 0.01 = 0.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_3^2) &= 0.51 + 4 \cdot 0.49 = 2.47 \\ \Longrightarrow Var(X_3) &= 2.47 - 1.49^2 = 0.2499 \end{aligned}$$

Beispiel zu 1.) - Varianz

- direkt

$$
\begin{aligned}
(E(X_1^2), E(X_2^2), E(X_3^2)) &= (1,0,1)\cdot 0.2 + (1,0,4)\cdot 0.1 \\
&\quad +(4,0,1)\cdot 0.1 + (4,0,4)\cdot 0.1 \\
&\quad + \ldots\ldots + (16,1,1)\cdot 0.01 + (16,1,4)\cdot 0.005 \\
&= (6.485, 0.1, 2.47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Var(X_1), Var(X_2), Var(X_3)) &= (6.485, 0.1, 2.47) - (2.305^2, 0.1^2, 1.49^2) \\
&= (1.172, 0.09, 0.2499)
\end{aligned}
$$

Zu 2.) - Kovarianz und Korrelationskoeffizient für die Analyse des Zusammenhangs:

Übertragung der Vorgehensweise in der deskriptiven Statistik auf diskrete ZV:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Merkmalausprägung}\\\text{arithm. Mittel}\\\text{rel. Häufigkeiten}\end{array}\right\}\textit{entspricht}\left\{\begin{array}{l}\text{Werte des ZV}\\\text{Erwartungswert}\\\text{Wahrscheinlichkeiten}\end{array}\right.$$

Zu 2.) - Kovarianz und Korrelationskoeffizient für die Analyse des Zusammenhangs:

Kovarianz zweier Merkmale aus Häufigkeitsverteilung

(X, Y) **diskret:**

$$Cov(x, y) = \sum_a \sum_b (a - \overline{x})(b - \overline{y})p(a, b)$$

entspricht

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) \cdot P(X = x_i, Y = y_j)$$

zu 2.) - Kovarianz und Korrelationskoeffizient für die Analyse des Zusammenhangs:

Es gilt:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j, X = x_i) \quad \textbf{diskret}$$

$$\text{bzw.} \quad f_{x,y}(x, y) = f_{y,x}(y, x) \quad \textbf{stetig}$$

Folgerung: $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

Bemerkung: Die Kovarianz muss nicht existieren (d.h. nicht endlich).

zu 2.) - Kovarianz und Korrelationskoeffizient für die Analyse des Zusammenhangs:

(X, Y) **diskret:**

mit Werten x_i bzw. y_j

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(X = x_i, Y = y_j)$$

(X, Y) **stetig:**

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y))f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Wiederholung - Beispiel:

$X = (X_1, X_2, X_3)$ mit

X_1 habe die Werte 1,2,3,4

X_2 habe die Werte 0,1

X_3 habe die Werte 1,2

$\Rightarrow X$ hat die Werte: $(1,0,1),(1,0,2),(1,1,1),(1,1,2),(2,0,1)\dots$

Wiederholung - Beispiel:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$X_3 = 1:$ $\qquad P(X_1 = \cdot, X_2 = \cdot, X_3 = 1)$

		$X_1 =$				
		1	2	3	4	$P(X_2 = \cdot, X_3 = 1)$
$X_2 =$	0	0.2	0.1	0.1	0.05	0.45
	1	0.01	0.02	0.02	0.01	0.06
$P(X_1 = \cdot, X_3 = 1)$		0.21	0.12	0.12	0.06	$0.51 = P(X_3 = 1)$

Wiederholung - Beispiel:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$X_3 = 2:$ $\quad P(X_1 = \cdot, X_2 = \cdot, X_3 = 2)$

	$X_1 =$ 1	2	3	4	$P(X_2 = \cdot, X_3 = 2)$
$X_2 =$ 0	0.1	0.1	0.15	0.1	0.45
1	0.005	0.01	0.02	0.005	0.04
$P(X_1 = \cdot, X_3 = 2)$	0.105	0.11	0.17	0.105	$0.49 = P(X_3 = 2)$

Beispiel zu 2.):

$Cov(X_1, X_2) = ?$

Gemeinsame Verteilung:

		X_1				
		1	2	3	4	
$X_2 =$	0	0.3	0.2	0.25	0.15	0.9
	1	0.015	0.03	0.04	0.015	0.1
		0.315	0.23	0.29	0.165	1

$E(X_1) = 2.305$ $E(X_2) = 0.1$

Beispiel zu 2.):

$$Cov(X_1, X_2) =$$

$$\left.\begin{aligned} &\overbrace{(0-0.1)}^{0-E(X_2)}\Big(\overbrace{(1-2.305)}^{1-E(X_1)} \cdot \overbrace{0.3}^{P(1,0)} + (-0.305)\cdot 0.2 \\ &+ 0.695 \cdot 0.25 + 1.695 \cdot 0.15\Big) \end{aligned}\right\} \quad X_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &+(1-0.1)(-1.305 \cdot 0.015 - 0.305 \cdot 0.03 \\ &+ 0.695 \cdot 0.04 + 1.695 \cdot 0.015) \end{aligned}\right\} \quad X_2 = 1$$

$$= 0.0245$$

Bemerkung:

Sind X und Y unabhängig $\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

Beweis im diskreten Fall: analog zur deskriptiven Statistik

Beweis im stetigen Fall:

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))f_X(x)dx}_{=0}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E(Y))f_Y(y)dy}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y \text{ unabhängig}$$

Korrelationskoeffizient

Veränderung der Kovarianz bei linearer Transformation:

$$h_1(X) = \alpha X + \beta, \qquad h_2(Y) = \gamma Y + \delta$$

X hat Werte x_i, Y hat Werte y_j

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(h_1(X) = \alpha x_i + \beta, h_2(Y) = \gamma y_j + \delta)$$

$\Rightarrow h_1(X)$ hat Werte $\alpha x_i + \beta, \qquad h_2(Y)$ hat die Werte $\gamma y_j + \delta$

Korrelationskoeffizient

$$Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma Cov(X, Y)$$

$$\begin{aligned} Var(\alpha X + \beta) &= Var(h_1(X)) = \alpha^2 Var(X) \\ Var(\gamma Y + \delta) &= Var(h_2(Y)) = \gamma^2 Var(Y) \end{aligned}$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} \varrho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) &= \frac{Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta)}{\sqrt{Var(\alpha X + \beta) \cdot Var(\gamma Y + \delta)}} \\ &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \varrho(X, Y) \end{aligned}$$

ist invariant unter linearen Transformationen.

Korrelationskoeffizient

Definition:

$$\varrho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

heißt Korrelationskoeffizient

Beispiel zu 2.)

Korrelation von X_1 und X_2:

$$\varrho(X_1, X_2) = \frac{0.0245}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} = \frac{0.0245}{1.08 \cdot 0.3} = 0.0756$$

Kovarianz bei linearer Transformation

Bemerkungen:

1.) $\varrho(X,Y)$ ist invariant unter linearen Transformationen.

2.) $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$
(analog zum Bravais - Pearson - Korrelationskoeffizienten der deskriptiven Statistik)

$\varrho(X,Y) > 0$ X und Y sind "positiv korreliert"
$\varrho(X,Y) = 0$ X und Y sind "unkorreliert"
$\varrho(X,Y) < 0$ X und Y sind "negativ korreliert"

Kovarianzmatrix

$X = (X_1, \ldots, X_k)$ ist Zufallsvektor

Dann paarweise Kovarianz

$$c_{ij} = \begin{cases} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) & i \neq j \\ \mathrm{Cov}(X_i, X_i) & i = j \end{cases}$$

Zusammenstellung in einem Matrixschema

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$$ ergibt die **Kovarianzmatrix.**

Korrelationsmatrix

Analog **Korrelationsmatrix**

$$\varrho_{ij} = \begin{cases} \varrho(X_i, X_j) & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

ergibt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1k} \\ \varrho_{21} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \varrho_{k1} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Korrelationsmatrix

Bemerkungen:

1.) Die Matrix C ist symmetrisch, d.h.
$c_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i) = c_{ji}$ für $i \neq j$

2.) Sind die Komponenten paarweise unkorreliert, d.h. $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$, so hat die Kovarianzmatrix Diagonalgestalt, d.h. außerhalb der Diagonalen stehen nur Nullen.
$X_1, \ldots, X_n$ heißen dann *unkorreliert.*

Kovarianzmatrix bei unkorrelierten $X_1, \ldots, X_n$:

$$C = \begin{pmatrix} Var(X_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

Korrelationsmatrix bei unkorrelierten $X_1, \ldots, X_n$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe:
Berechnung der Kovarianzmatrix im Beispiel.