Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)
Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel XI - Die *n*-fache unabhängige Wiederholung eines Experiments

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Die n-fache unabhängige Wiederholung eines Experiments (Einfache Stichprobe mit Zurücklegen)

Experiment: Durchführung eines zufallsbehafteten Vorgangs.

Unabhängige Wiederholung:
Keine gegenseitige Beeinflussung beim Ablauf der einzelnen Durchführungen.

Unter identischen Bedingungen:
Die äußeren Umstände des Experiments sind - soweit sie kontrollierbar sind - jeweils dieselben.

Zufallsvorgang:

- Zufallsauswahl (Ziehen einer Stichprobeneinheit)
- Auswirkungen von störenden, unbeeinflussbaren und unsystematischen Einflussfaktoren (z.B. Messfehler):
  - unbeeinflußbar
  - nicht kontrollierbar
  - nur mit hohem Kostenaufwand kontrollierbar

Zufallsvorgang wird modelliert durch Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$

$\omega \in \Omega$ - Ablauf (Ausgang) des Zufallsvorgangs
X - Zufallsvariable auf $(\Omega, A(\Omega), P)$
$X(\omega)$ - Wert von X beim Ablauf ω.

n-fache Durchführung:

Kombination von n Einzeldurchführungen $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ (führt zu n Beobachtungswerten $X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n),\ \omega_i \in \Omega$).

Menge aller Kombinationsmöglichkeiten

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) | \omega_i \in \Omega \ \text{ für } \ i = 1, \ldots, n\}$$

Grundgesamtheit bei n-facher Wiederholung

Beispiele:

1.) 4 maliges Würfeln eines Würfels:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\Omega^4 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), \dots, (6, 6, 6, 5), (6, 6, 6, 6)\}$

2.) "Ziehen mit Zurücklegen" aus einer Warenpartie
ω_1 erstes Stichprobenelement
$\vdots$
ω_n n-tes Stichprobenelement

Bemerkung: Zurücklegen ist erforderlich damit

- die Wiederholungen unabhängig sind
- die Bedingungen identisch sind

Aufgabe:
Vervollständigung von Ω^n zu einem Wahrscheinlichkeitsraum:

gesucht:	System von Ereignissen $A^n(\Omega)$
	Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{(n)}$
zu berücksichtigen:	1.) Unabhängigkeit der Durchführungen
	2.) identische Bedingungen bei den Durchführungen

Ereignis bei einmaliger Durchführung:

$A \subset \Omega$ d.h. A gehört zu dem System der Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, A(\Omega), P)$), $A \in A(\Omega)$

Zu A betrachten wir das Ereignis:

Bei der i-ten Durchführung soll A eintreten, d.h. "$\omega_i \in A$"

Beispiel:

1.) Viermaliges Werfen eines Würfels:

Sei A Augenzahl gerade, d.h. $A = \{2, 4, 6\}$

Mögliches Ereignis: Beim zweiten Wurf ist die Augenzahl gerade: "$\omega_2 \in A$"

$$\begin{aligned} & \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) | \omega_2 \in \{2, 4, 6\}\} \\ = \quad & \{(1, 2, 1, 1), \ldots, (6, 2, 6, 6), (1, 4, 1, 1), \ldots, (6, 4, 6, 6), \\ & (1, 6, 1, 1), \ldots, (6, 6, 6, 6)\} \end{aligned}$$

648 Elementarereignisse von 1296 $(6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6)$

Forderung: Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$

Beispiel:

2.) „Ziehen mit Zurücklegen“ aus einer Warenpartie Ω

Sei A: Produktionseinheit defekt
$(A = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ defekt}\} \subset \Omega)$

Mögliches Ereignis: Das dritte Stichprobenelement ist defekt, d.h. $\omega_3 \in A$

$$\{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_3 \in A, \omega_i \text{ beliebig für } i \neq 3\}$$

Forderung:
Wahrscheinlichkeit von $\omega_3 \in A: \quad p = P(A) =$ Ausschussanteil der Warenpartie

Ereignis: A tritt bei der i-ten Durchführung auf

$$\begin{aligned} \omega_i \in A &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) | \omega_i \in A, \omega_j \text{ beliebig für } j \neq i\} \\ &= \Omega \times \ldots \times \underbrace{A}_{i-te\ \ Stelle} \times \ldots \times \Omega \end{aligned}$$

A - i-te Stelle des kartesischen Produkts

Forderung:
Ereignis A hat bei jeder der n Durchführungen dieselbe Wahrscheinlichkeit wie bei einer einmaligen Durchführung, also die Wahrscheinlichkeit $P(A)$

$$P^{(n)}(\Omega \times \ldots \times A \times \ldots \times \Omega) = P(A)$$

Beispiele:

1.) Viermaliges Würfeln

Bei einmaligem Würfeln gilt:

A „Augenzahl gerade“: $P(A) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ für viermaliges Würfeln gilt:

$P^{(4)}(„\omega_2 \text{ gradzahlig“}) = \frac{1}{2}$

2.) „Ziehen mit Zurücklegen“ aus einer Warenpartie

A Ausschuss mit $P(A) = p$

$\Rightarrow P^{(n)}(„\omega_3 \in A\text{“}) = p$

Allgemein: $P^{(n)}(\Omega \times \ldots \times A \times \ldots \times \Omega) = P(A)$

Kombiniertes Ereignis: $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in $(\Omega, A(\Omega), P)$

Dann gemeinsam

$$
\begin{aligned}
& \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n \\
= \quad & \omega_i \in A_i \ \text{ für } i = 1, \ldots, n \\
= \quad & \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n | \omega_i \in A_i \ \text{ für } i = 1, \ldots, n\} \\
= \quad & A_1 \times \ldots \times A_n \\
= \quad & A_1 \times \Omega \times \ldots \times \Omega \cap \Omega \times A_2 \times \Omega \times \ldots \times \Omega \cap \ldots \\
& \ldots \cap \Omega \times \ldots \times \Omega \times A_n
\end{aligned}
$$

Beispiel: 5 Spiele mit Realisation ω_i im Roulette (Beispiel für kombiniertes Ereignis)

$$\begin{array}{lcll} \omega_1 & & \text{im zweiten Drittel} & (\omega_1 \in \{13,\dots,24\}) \\ \omega_2 & = & 0 & \\ \omega_3 & & \text{im dritten Drittel} & (\omega_3 \in \{25,\dots,36\}) \\ \omega_4 & & \text{im ersten Drittel} & (\omega_4 \in \{\ 1,\dots,12\}) \\ \omega_5 & & \text{im zweiten Drittel} & (\omega_5 \in \{13,\dots,24\}) \end{array}$$

Wahrscheinlichkeit dafür wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Durchführungen

$$= \frac{12}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{12}{37} \cdot \frac{12}{37} \cdot \frac{12}{37} \ .$$

Allgemein: Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Durchführungen sind die Ereignisse $\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n$, $A_i \in A(\Omega)$ unabhängig, also

$$\begin{aligned} P^{(n)}(\omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_n \in A_n) &= P^{(n)}(\omega_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P^{(n)}(\omega_n \in A_n) \\ &= P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{(n)}(\omega_i \in A_i \;\text{ für } i = 1, \ldots, n) &= P^{(n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) \\ &= P^{(n)}(A_1 \times \Omega \times \ldots \times \Omega \\ &\quad \cap \Omega \times A_2 \times \Omega \times \ldots \times \Omega \cap \ldots \\ &\quad \cap \Omega \times \ldots \times \Omega \times A_n) \\ &= P^{(n)}(A_1 \times \Omega \times \ldots \times \Omega) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad P^{(n)}(\Omega \times \ldots \times \Omega \times A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \end{aligned}$$

Damit: $A_1 \times \ldots \times A_n$ Grundbausteine von $A^n(\Omega)$

Mengensystem $A^n(\Omega)$ der Ereignisse bei n-facher Durchführung enthält alle Mengen

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

und alles, was sich nach den Regeln einer σ-Algebra daraus ergibt.

Für das Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{(n)}$ gilt

$$P^{(n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

und, was aus den Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes daraus folgt.

Resultat: n-fache Potenz eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, A(\Omega), P)$:

$$(\Omega^n, A^n(\Omega), P^{(n)})$$

- Grundgesamtheit Ω^n: $\Omega \times \ldots \times \Omega$
- Mengensystem der Ereignisse $A^n(\Omega)$ erzeugt von $A_1 \times \ldots \times A_n$ mit $A_1, \ldots, A_n \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{(n)}$ ergibt sich aus der Forderung

$$P^{(n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Wir haben somit den „Produktraum“ aus den

$$(\Omega, A(\Omega), P)\ldots(\Omega, A(\Omega), P)$$

Allgemein:

$$(\Omega_1, A(\Omega_1), P_1)\ldots(\Omega_n, A(\Omega_n), P_n)$$

Beobachtung einer Zufallsvariable bei jeder Durchführung

$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad$ Zufallsvariable auf $(\Omega, A(\Omega), P)$

$(\Omega^n, A^n(\Omega), P^{(n)})$ Modell der n-fachen unabhängigen Durchführung eines zufallsbehafteten Vorgangs unter identischen Bedingungen.

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$ möglicher Gesamtablauf bei n Durchführungen

Beobachtung bei Einzelablauf ω:

$X(\omega)$ „Wert einer Zufallsvariablen"

Zugehörige Beobachtungswerte bei den n Durchführungen:

$X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)$

In Vektorschreibweise:

$$\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n); \quad Y(\overrightarrow{\omega}) = (Y_1(\overrightarrow{\omega}), \ldots, Y_n(\overrightarrow{\omega})) = (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n))$$

$X(\omega_i)$ ist die i-te Komponente des Vektors $Y(\overrightarrow{\omega})$.

Mit $Y(\overrightarrow{\omega}) = (Y_1(\overrightarrow{\omega}) \ldots Y_n(\overrightarrow{\omega}))$, $Y : \Omega^n \to \mathbb{R}^n$ gilt also

$$Y_i(\overrightarrow{\omega}) = X(\omega_i)$$

Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y?

(gesucht: Verteilungsfunktion von Y)

Verteilung von Y

$$
\begin{aligned}
& F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \\
= \quad & P^{(n)}(Y_i \leq y_i \text{ für } i = 1, \ldots, n) \\
= \quad & P^{(n)}(\{\overrightarrow{\omega} \in \Omega^n \mid Y_i\ (\overrightarrow{\omega}) \leq y_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}) \\
= \quad & P^{(n)}(\{\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n \mid Y_i\ (\overrightarrow{\omega}) = X(\omega_i) \leq y_i, \\
& \text{ für } i = 1, \ldots, n\})
\end{aligned}
$$

Mit dem Ereignis

$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y_i\} = \text{"}X \leq y_i\text{"} \in A(\Omega)$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, \ldots, y_n) &= P^{(n)}(\{\overrightarrow{\omega} \in \Omega^n \mid \omega_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}) \\ &= P^{(n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(X \leq y_i) \\ &= F_X(y_1) \ldots F_X(y_n). \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion von Y an der Stelle $(y_1, \ldots, y_n)$ ist das Produkt der Funktionswerte der Verteilungsfunktion von X an den Stellen $y_1, \ldots, y_n$.

Randverteilung einer Komponente Y_i:

$$\begin{aligned}
F_{Y_i}(y_i) &= \lim_{\substack{y_j \to \infty \\ j \neq i}} F_Y(y_1, \ldots, y_n) = \lim_{\substack{y_j \to \infty \\ j \neq i}} \prod_{j=1}^{n} P(X \leq y_j) \\
&= P(X \leq y_i) \cdot \lim_{y_j \to \infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(X \leq y_j) \\
&= P(X \leq y_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lim_{y_j \to \infty} P(X \leq y_j) \\
&= P(X \leq y_i) = F_X(y_i).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad F_Y(y_1, \ldots, y_n) = F_X(y_1) \cdot \ldots \cdot F_X(y_n) = F_{Y_1}(y_1) \ldots F_{Y_n}(y_n)$

$\Rightarrow \quad Y_1, \ldots, Y_n$ sind unabhängig

Folgerung:

a) X diskret:

$$P^{(n)}(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X = y_i)$$

b) X stetig:

$$f_Y(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(y_i)$$

Zusammenfassung

Bei der n-**fachen unabhängigen Wiederholung eines Experiments (unter identischen Bedingungen)** liegt folgende Situation vor:

Die Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ beschreibe die einmalige Durchführung. Dann wird die n-malige Durchführung beschrieben durch eine n-dimensionale Zufallsvariable $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit

- $Y_1, \ldots, Y_n$ sind unabhängig
- Y_i für $i = 1, \ldots n$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie X (ist **identisch verteilt** wie X)

$\Rightarrow$ $Y_1, \ldots, Y_n$ sind **unabhängig, identisch verteilt (uiv)** wie X, (engl.: iid (**independent, identically distributed**))

Zusammenfassung

Wichtiges Anwendungsbeispiel:

Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen

Daher die Sprechweise

$Y_1, \ldots, Y_n$ **Stichprobe mit Zurücklegen zu X.**

(Grundlage der schließenden Statistik).