Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel X - Randverteilung, bedingte Verteilung und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

10. Randverteilung, bedingte Verteilung und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Gegeben: k-dimensionale Zufallsvariable X mit Wkt. - Verteilung, z.B. in Form der Verteilungsfunktion

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \; \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Beispiele:

- Gemeinsame Verteilung von Dollar/Euro Wechselkurs und Exportvolumen in die USA
- Gemeinsame Verteilung der Kurse der im DAX enthaltenen Aktien
- Gemeinsame Verteilung von Sonnenstunden/Monat und Umsatz an Sonnenschutzmittel

⋮

-

Mögliche Fragestellung:

a) Wie ist die Verteilung der Zufallsvariablen separat betrachtet ?
b) Beeinflusst ein fixierter Wert bei einer der Komponenten die (gemeinsame) Verteilung der übrigen $k-1$ Werte ?
c) Gibt es einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen ?

Gegeben: ZV $X = (X_1, \cdots, X_k)$

Die Verteilung einer Komponente X_{i^*} heißt Randverteilung von X_{i^*}.

Verteilungsfunktion einer Komponente X_{i^*}

$$\begin{aligned} F_{X_{i^*}}(\alpha) &= P(X_{i^*} \leq \alpha) \\ &= P(X_{i^*} \leq \alpha, X_i \text{ beliebig für } i \neq i^*) \\ &= P(X_{i^*} \leq \alpha, X_i \leq \infty \text{ für } i \neq i^*) \\ &= \lim_{\alpha_i \to \infty} F(\alpha_1, \cdots, \alpha, \cdots \alpha_k) \text{ für } i \neq i^* \end{aligned}$$

$F_{X_{i^*}}$ ist die Verteilungsfunktion von X_{i^*}

Beispiel - gemeinsame und Randverteilungen

Gegeben sei die bivariate Dichte

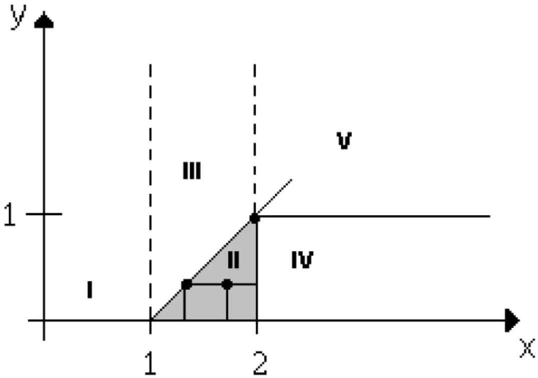
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann folgt für die Verteilung von Y

$$\begin{aligned} F_Y(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{\alpha} \int_{y+1}^{2} \frac{6}{5} x dx dy = \int_{0}^{\alpha} \left[\frac{6}{5} \frac{x^2}{2} \right]_{y+1}^{2} dy \\ &= \frac{3}{5} \int_{0}^{\alpha} \left(4 - (y+1)^2\right) dy = \frac{3}{5} \alpha \left(-\frac{\alpha^2}{3} - \alpha + 3 \right) \overset{\alpha=1}{=} ? \end{aligned}$$

Für die gemeinsame Verteilung von X und Y an den Stellen α_1 bzw. α_2 gilt dann

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_0^{\alpha_2} \int_{y+1}^{\alpha_1} \frac{6x}{5} dx dy = \frac{3}{5} \int_0^{\alpha_2} (\alpha_1^2 - y^2 - 2y - 1) dy \\ &= \frac{3}{5} \left[\alpha_1^2 y - \frac{1}{3} y^3 - y^2 - y \right]_0^{\alpha_2} \\ &= \frac{3}{5} \left[\alpha_1^2 \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_2^3 - \alpha_2^2 - \alpha_2 \right] \end{aligned}$$



Integration, falls $(\alpha_1, \alpha_2) \notin I$

Beispiel:

Gesucht: Randverteilungen

Für $X, \quad 1 \leq \alpha_1 \leq 2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha_2 \to \infty} F(\alpha_1, \alpha_2) &= F(\alpha_1, \alpha_1 - 1) \\
&= \frac{3}{5}(\alpha_1)^2(\alpha_1 - 1) - \frac{1}{5}(\alpha_1 - 1)^3 - \frac{3}{5}(\alpha_1 - 1)^2 \\
&\quad - \frac{3}{5}(\alpha_1 - 1) \\
&= \frac{2}{5}(\alpha_1)^3 - \frac{3}{5}(\alpha_1)^2 + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$F_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \frac{2}{5}(\alpha)^3 - \frac{3}{5}(\alpha)^2 + \frac{1}{5} & 1 \leq \alpha \leq 2 \\ 1 & \alpha > 2 \end{cases}$$

Für $Y: 0 \leq \alpha_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_1 \to \infty} F(\alpha_1, \alpha_2) &= F(2, \alpha_2) \\ &= \frac{3}{5} 4\alpha_2 - \frac{1}{5}(\alpha_2)^3 + \frac{3}{5}(\alpha_2)^2 - \frac{3}{5}\alpha_2 \\ &= \frac{9}{5}\alpha_2 - \frac{3}{5}(\alpha_2)^2 - \frac{1}{5}(\alpha_2)^3 \end{aligned}$$

$$F_Y(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{9}{5}\alpha - \frac{3}{5}(\alpha)^2 + \frac{1}{5}(\alpha)^3 & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 & \alpha > 1 \end{cases}$$

X diskret

X diskret mit Werten $x^j,\ j \in I$

W - Verteilung von Komponente $X_{i^*} : x \in \mathbb{R}$

$P(X_{i^*} = x) = P(X_{i^*} = x,\quad X_i \quad \text{beliebig für} \quad i \neq i^*)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_{i^*} erhält man indem man den Wert von X_{i^*} festhält und über alle Werte der übrigen Komponenten aufsummiert.

Also:
Suche alle Werte x^j mit $x^j_{i^*} = x$ (Komponente i^* von x^j ist x).

Dann

$$P(X_{i^*} = x) = \sum_{x^j \text{ mit } x^j_{i*} = x} P(X = x^j)$$

Beispiel: *Drei Qualitätsmerkmale*

Bei einem Bauteil werden drei Qualitätsmerkmale überprüft:

1.) Oberflächengüte (X_1)
2.) Bruchfestigkeit (X_2)
3.) Masstreue (X_3)

Bei allen drei Merkmalen wird eine Einstufung in die Ausprägung gut/schlecht mit den Codierungen 0 (gut) und 1 (schlecht) vorgenommen. Dementsprechend gibt es 8 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_1: $P(X_1 = 1) = ?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $\underbrace{(1,0,0)}_{x^5}\underbrace{(1,0,1)}_{x^6}\underbrace{(1,1,0)}_{x^7}\underbrace{(1,1,1)}_{x^8}$

$$P(X_1 = 1) = \sum_{j=5}^{8} P(X = x^j) = 0.03 + 0.01 + 0.04 + 0.02 = 0.1$$

$$\Rightarrow P(X_1 = 0) = 0.9$$

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_2: $P(X_2 = 1) =?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $\underbrace{(0,1,0)}_{x^3}\underbrace{(0,1,1)}_{x^4}\underbrace{(1,1,0)}_{x^7}\underbrace{(1,1,1)}_{x^8}$

$$\sum_{j=3,4,7,8} P(X = x^j) = 0.1$$

$$\Rightarrow P(X_2 = 0) = 0.9$$

Aufgabe:

Bestimmung der Randverteilung von X_3: $P(X_3 = 1) = ?$

	(x_1, x_2, x_3)	$P((X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3))$
x^1	(0,0,0)	0.85
x^2	(0,0,1)	0.01
x^3	(0,1,0)	0.02
x^4	(0,1,1)	0.02
x^5	(1,0,0)	0.03
x^6	(1,0,1)	0.01
x^7	(1,1,0)	0.04
x^8	(1,1,1)	0.02

Werte: $x^2 = (0,0,1), x^4 = (0,1,1), x^6 = (1,0,1), x^8 = (1,1,1)$

$$P(X_3 = 1) = \sum_{j=2,4,6,8} P(X = x^j) = 0.06$$

$$P(X_3 = 0) = 0.94$$

Verteilungsfunktion:

Damit:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \;\text{ oder } & x_2 < 0 \;\text{ oder } & x_3 < 0 \\ 0.85 & 0 \leq x_1 < 1, & 0 \leq x_2 < 1, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.86 & 0 \leq x_1 < 1, & 0 \leq x_2 < 1, & 1 \leq x_3 \\ 0.87 & 0 \leq x_1 < 1, & 1 \leq x_2, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.88 & 1 \leq x_1, & 0 \leq x_2 < 1, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 0.9 & 0 \leq x_1 < 1, & 1 \leq x_2, & 1 \leq x_3 \\ 0.9 & 1 \leq x_1, & 0 \leq x_2 < 1, & 1 \leq x_3 \\ 0.94 & 1 \leq x_1, & 1 \leq x_2, & 0 \leq x_3 < 1 \\ 1 & 1 \leq x_1, & 1 \leq x_2, & 1 \leq x_3 \end{cases}$$

Alternative Berechnung der Randverteilung von X_1:

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2, x_3 \to \infty} F_x(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \\ 0.9 & 0 \le x_1 < 1 \\ 1 & 1 \le x_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X_1 = 0) = 0.9 \quad ; \quad P(X_1 = 1) = 0.1$

X stetig

X **stetig:**

mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F_X :

$$F_{X_{i^*}}(\alpha) = \lim_{x_i \to \infty} F_X(x_1, \cdots, \alpha, \cdots, x_k), \quad i \neq i^*$$

Es gilt

$$F_X(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = \int_{-\infty}^{\alpha_k} \cdots \int_{-\infty}^{\alpha_1} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

X stetig

Damit ist

$$F_{X_{i^*}}(\alpha) \quad = \lim_{\substack{\alpha_i \to \infty \\ \text{für } i \neq i^*}} F_X(\alpha_1, \cdots, \alpha, \cdots \alpha_k)$$

$$= \lim_{\substack{\alpha_i \to \infty \\ i \neq i^*}} \int\limits_{-\infty}^{\alpha_k} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\alpha_1} f(x_1, \cdots, x_k) dx_1 \cdots dx_{i^*} \cdots dx_k$$

$$\Rightarrow f_{X_{i^*}}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x, \cdots x_k) \underbrace{dx_1 \cdots dx_k}_{\neq dx_{i^*}}$$

1. **Beispiel** - zweidimensionale stetige ZV

Sei

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} - e^{-\lambda_1 x_1} - e^{-\lambda_2 x_2} & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gemeinsame Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X = (X_1, X_2)$.

Dann gilt für $\alpha > 0$:

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(\alpha) &= P(X_1 \leq \alpha) = \lim_{x_2 \to \infty} F(\alpha, x_2) \\
&= \lim_{x_2 \to \infty} (1 + e^{-\lambda_1 \alpha} e^{-\lambda_2 x_2} - e^{-\lambda_1 \alpha} - e^{-\lambda_2 x_2}) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 \alpha} \\
(&= 0 \text{ für } \alpha \leq 0)
\end{aligned}
$$

Die Randverteilung ist also eine Exponentialverteilung.

2. **Beispiel** - zweidimensionale stetige ZV

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte von X_1: $\quad 1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy &= \int_0^{x-1} \frac{6}{5}xdy = \left[\frac{6}{5}xy\right]_0^{x-1} \\ &= \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5}x \end{aligned}$$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5}x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte von X_2: $\quad 0 \leq y \leq 1$

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx &= \int_{y+1}^{2} \frac{6}{5} x dx = \left[\frac{3}{5} x^2 \right]_{y+1}^{2} \\
&= \frac{12}{5} - \frac{3}{5} y^2 - \frac{6}{5} y - \frac{3}{5} \\
&= \frac{9}{5} - \frac{3}{5} y^2 - \frac{6}{5} y
\end{aligned}
$$

$$
f_{X_2}(y) = \begin{cases} \frac{9}{5} - \frac{6}{5} y - \frac{3}{5} y^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Frage: Wie beeinflusst ein fixierter Wert x bei einer Komponente die Verteilung der restlichen Komponenten ?

Zunächst: Zweidimensionale ZV (X, Y) diskret betrachtet

- x fixierter Wert bei X Ereignis A : "$X = x$"
- y_j beliebiger Wert von Y Ereignis B_j : "$Y = y_j$"

Frage: Gibt es einen Einfluss von A auf B ?

Antwort: Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(X = x, Y = y_j)}{P(X = x)} = P(Y = y_j|X = x)$$

wird verglichen mit $P(Y = y_j)$.

$P(Y = y_j|X = x) \, \forall \, y_j \in \mathbb{R}$ heißt bedingte Verteilung von Y unter der Bedingung "$X = x$".

Frage: Gibt es einen Einfluss von A auf B ?

Kein Einfluss, wenn

$$P(Y = y_j | X = x) = P(Y = y_j)$$

bzw.

$$\frac{P(Y = y_j, X = x)}{P(X = x)} = P(Y = y_j)$$

bzw.

$$P(Y = y_j, X = x) = P(Y = y_j)P(X = x)$$

(Unabhängigkeit der Ereignisse "$X = x$" und "$Y = y_j$")

Definition: (X, Y) diskret

X und Y heißen **unabhängig**, wenn

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

für alle Werte x von X und alle Werte y von Y gilt.

Unabhängigkeit von X und Y bedeutet also Unabhängigkeit von "$X = x$" und "$Y = y$" für alle Werte x und y.

Beispiel: *Drei Qualitätsmerkmale*

Frage: Hängt die Qualität der beiden Merkmale "Oberflächengüte" und "Bruchfestigkeit" zusammen ?

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Oberflächengüte und Bruchfestigkeit :

$$\begin{aligned} P((X_1, X_2) = (0,0)) &= P((0,0,x_3) | x_3 \text{ beliebig }) \\ &= P((X_1, X_2, X_3) = (0,0,0)) \\ &\quad + P((X_1, X_2, X_3) = (0,0,1)) \\ &= 0.85 + 0.01 = 0.86 \end{aligned}$$

Analog für $(0,1),(1,0),(1,1)$:

Bruchfestigkeit (X_2) Oberflächengüte (X_1)	gut	schlecht	$\sum$
gut	0.86	0.04	0.90
schlecht	0.04	0.06	0.10
$\sum$ Randverteilung von X_2	0.90	0.10	1

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bedingte Wahrscheinlichkeit der Bruchfestigkeit (X_2) unter der Bedingung "schlecht bei Oberflächengüte ($X_1 = 1$)":

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0|X_1 = 1) &= \frac{P(X_2 = 0, X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{0.04}{0.10} = 0.4 \\
P(X_2 = 1|X_1 = 1) &= \frac{P(X_2 = 1, X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{0.06}{0.10} = 0.6
\end{aligned}
$$

Wir haben:

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= 0.9 \neq P(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0.4 \\
P(X_2 = 1) &= 0.1 \neq P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 0.6 \\
P(X_1 = 0, X_2 = 0) &= 0.86 \neq P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81
\end{aligned}
$$

Folgerung: Keine Unabhängigkeit

Vermutlich gemeinsame Ursache, z.B. Materialfehler.

(X, Y) stetig

Problem: Bei einer stetigen Zufallsvariable X gilt für jede reelle Zahl x

$$P(X = x) = 0$$

Folgerung: Die bedingte Verteilung unter der Bedingung $X = x$ kann nicht direkt gebildet werden.

Statt x betrachten wir das Intervall $[x, x + \epsilon]$

$$A_\epsilon = \text{“}X \in [x, x + \epsilon]\text{“} = \{\omega \in \Omega | x \leq X(\omega) \leq x + \epsilon\}$$

A_ϵ verwenden wir als Bedingung unter der Voraussetzung:

$$P(A_\epsilon) = P(x \leq X \leq x + \epsilon) \neq 0$$

Bedingte W-verteilung von Y unter der Bedingung A_ϵ :

Gehen wir von der Verteilungsfunktion aus, so betrachtet man $Y \leq y$ unter der Bedingung A_ϵ :

$$\begin{aligned}
F_{Y|A_\epsilon}(y) &= P(Y \leq y | x \leq X \leq x+\epsilon) = \frac{P(Y \leq y, x \leq X \leq x+\epsilon)}{P(x \leq X \leq x+\epsilon)} \\
&= \frac{P(X \leq x+\epsilon, Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)}{F_X(x+\epsilon) - F_X(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\epsilon}(F_{(X,Y)}(x+\epsilon, y) - F_{(X,Y)}(x, y))}{\frac{1}{\epsilon}(F_X(x+\epsilon) - F_X(x))}
\end{aligned}$$

hängt von ϵ ab.

$\underline{\epsilon \to 0}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} F_{Y|A_\epsilon}(y) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{F_{(X,Y)}(x+\epsilon,y)-F_{(X,Y)}(x,y)}{\epsilon}}{\frac{F_X(x+\epsilon)-F_X(x)}{\epsilon}} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_{(X,Y)}(x,y)}{\frac{d}{dx} F_X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} F_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= F_{Y|X=x}(y)
\end{aligned}
$$

bedingte Verteilungsfunktion von Y unter der Bedingung $X = x$.

Bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{\partial F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x}}{f_X(x)}\right) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$$

Die bedingte Dichte hat die Eigenschaft einer Dichtefunktion.

Bedingte Verteilung stetiger *ZV*

Variierende Belastungsbedingungen bei einer Anlage

X_1: Belastung,

X_2: Lebensdauer

Gemeinsame Dichte:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 e^{-x_1 x_2} & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Frage: Soll Belastung kontrolliert werden z.B. Wert 0.7 ?

Bedingte Dichte von X_2 unter der Bedingung $X_1 = 0.7$

$$f_{X_2|X_1=0.7}(x_2) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(0.7, x_2)}{f_{X_1}(0.7)}$$

Zuerst: Berechnung der Randdichte von X_1 :

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_2 = \int_0^{\infty} x_1 e^{-x_1 x_2} dx_2 = 1, x_1 \in [0,1]$$

$\Rightarrow X_1$ gleichverteilt auf $[0,1]$

Damit bedingte Dichte: (nur definiert für $x_1 \in [0,1]$)

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 e^{-x_1 x_2}}{1} = x_1 e^{-x_1 x_2} & \text{für } \ x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } \ x_2 < 0 \end{cases}$$

Resultat: Exponentialverteilung mit Parameter x_1.

Somit: $\frac{1}{x_1}$ ist Erwartungswert der auf $X_1 = x_1$ bedingten Verteilung der Lebensdauer, x_1 Ausfallrate.

Bei kontrollierter Belastung mit Wert x_1 steigt die Lebensdauer (bzw. fällt die Ausfallrate) mit fallendem x_1.

Bedingte Dichte hängt von der Bedingung $X_1 = x_1$ ab. ($x_2 \geq 0$)

Überprüfungsaufgabe: Berechnung der Randverteilung von X_2

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)dx_1 = \int_0^1 x_1 e^{-x_1 x_2} dx_1 \\
&= \frac{1 - e^{-x_2} - x_2 e^{-x_2}}{x_2^2}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

Im **diskreten** Fall:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y unter der Bedingung $X = x$ mit $P(X = x) \neq 0$:

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

für alle Werte y von Y. Zu vergleichen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

Zusammenfassung

Im **stetigen** Fall:

bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$ mit $f_X(x) \neq 0$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

zu vergleichen mit der Randdichte von Y.

Unabhängigkeit

X und Y heißen unabhängig, wenn

a) im diskreten Fall:
die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y nicht von der Bedingung abhängt und mit der Verteilung von Y übereinstimmt.

b) Im stetigen Fall:
die bedingte Dichte nicht von der Bedingung abhängt und mit der Randdichte übereinstimmt.

formal - Unabhängigkeit

zu a) $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = P(Y = y)$

$\Rightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$, für alle x und y

zu b) $\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$

$\Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, für alle x und y

formal - Unabhängigkeit

Aus a) bzw. b) folgt:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \text{ für alle } x \text{ und } y$$

Die Umkehrung gilt auch (Übungsaufgabe).

Die Definition lässt sich ausdehnen für $X_1, \ldots, X_n$ mit $n > 2$.