Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)
Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel VI - Lage- und Streuungsparameter

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Lage- und Streuungsparameter

Ziel wie in der deskriptiven Statistik:

Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Kenngrößen:

- bei diskreten Verteilungen:
  Wahrscheinlichkeiten werden wie relative Häufigkeiten verwendet
- bei stetigen Verteilungen:
  Mit der Dichte wird analog zu Histogramm gearbeitet (Häufigkeitsdichte)

Lage- und Streuungsparameter

Ziel wie in der deskriptiven Statistik:

Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Kenngrößen:

- bei diskreten Verteilungen:
  Wahrscheinlichkeiten werden wie relative Häufigkeiten verwendet
- bei stetigen Verteilungen:
  Mit der Dichte wird analog zu Histogramm gearbeitet (Häufigkeitsdichte)

Lage- und Streuungsparameter

Ziel wie in der deskriptiven Statistik:

Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Kenngrößen:

- bei diskreten Verteilungen:
  Wahrscheinlichkeiten werden wie relative Häufigkeiten verwendet
- bei stetigen Verteilungen:
  Mit der Dichte wird analog zu Histogramm gearbeitet (Häufigkeitsdichte)

Lage- und Streuungsparameter

Ziel wie in der deskriptiven Statistik:

Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Kenngrößen:

- bei diskreten Verteilungen:
  Wahrscheinlichkeiten werden wie relative Häufigkeiten verwendet
- bei stetigen Verteilungen:
  Mit der Dichte wird analog zu Histogramm gearbeitet (Häufigkeitsdichte)

Lage- und Streuungsparameter

Lageparameter:

Modalwert, Median, Erwartungswert

Streuungsparameter:

Varianz bzw. Standardabweichung

Lage- und Streuungsparameter

Lageparameter:

Modalwert, Median, Erwartungswert

Streuungsparameter:

Varianz bzw. Standardabweichung

Lageparameter

I.) Modalwert: (Merkamalsausprägungen mit maximaler Häufigkeit)

diskret:

Modalwert ist (sind) der (die) Wert(e) einer Zufallsvariablen **mit der größten Wahrscheinlichkeit**

$$\begin{aligned} P(X = x_{\text{mod}}) &= P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_{\text{mod}}\}\right) \\ &\geq P(X = x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lageparameter

I.) Modalwert: (Merkamalsausprägungen mit maximaler Häufigkeit)

diskret:

Modalwert ist (sind) der (die) Wert(e) einer Zufallsvariablen **mit der größten Wahrscheinlichkeit**

$$\begin{aligned} P(X = x_{\text{mod}}) &= P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_{\text{mod}}\}\right) \\ &\geq P(X = x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lageparameter

I.) Modalwert: (Merkamalsausprägungen mit maximaler Häufigkeit)

diskret:

Modalwert ist (sind) der (die) Wert(e) einer Zufallsvariablen **mit der größten Wahrscheinlichkeit**

$$\begin{aligned} P(X = x_{\text{mod}}) &= P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_{\text{mod}}\}\right) \\ &\geq P(X = x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lageparameter

I.) Modalwert: (Merkamalsausprägungen mit maximaler Häufigkeit)

diskret:

Modalwert ist (sind) der (die) Wert(e) einer Zufallsvariablen **mit der größten Wahrscheinlichkeit**

$$\begin{aligned} P(X = x_{\mathrm{mod}}) &= P\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_{\mathrm{mod}}\}\right) \\ &\geq P(X = x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lageparameter

stetig:

(modale Klasse: Klasse mit maximalen Häufigkeitsdichte)

Modalwert ist (sind) die **Maximalstelle(n)** der **Dichtefunktion**

$$f(x_{\text{mod}}) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

Lageparameter

stetig:

(modale Klasse: Klasse mit maximalen Häufigkeitsdichte)

Modalwert ist (sind) die **Maximalstelle(n)** der **Dichtefunktion**

$$f(x_{\text{mod}}) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

Lageparameter

stetig:

(modale Klasse: Klasse mit maximalen Häufigkeitsdichte)

Modalwert ist (sind) die **Maximalstelle(n)** der **Dichtefunktion**

$$f(x_{\text{mod}}) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

Beispiele:

1. Zahlenbeispiele zur hypergeometrischen, Binomial- und Poisson- Verteilung.

2. Binomialverteilung mit $n = 10, p = 0,5$:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = m)$	.001	.010	.044	.117	.205	.246	.205	.117	.044	.010	.001

3. Geometrische Verteilungen: s. Grafik der Dichtefunktion

4. Exponentialverteilung: $x = 0$

5. Normalverteilung: $x = \mu$

Lageparameter

II.) Median: (Zentralwert)

Idee wie in der deskriptiven Statistik: "Halbierung" der Verteilung beim Median.

x_z Median (Zentralwert), wenn

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \geq x_z) \geq \frac{1}{2}$$

Damit gilt dann

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X < x_z) \leq \frac{1}{2}$$

Lageparameter

II.) Median: (Zentralwert)

Idee wie in der deskriptiven Statistik: "Halbierung" der Verteilung beim Median.

x_z Median (Zentralwert), wenn

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \geq x_z) \geq \frac{1}{2}$$

Damit gilt dann

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X < x_z) \leq \frac{1}{2}$$

Lageparameter

II.) Median: (Zentralwert)

Idee wie in der deskriptiven Statistik: "Halbierung" der Verteilung beim Median.

x_z Median (Zentralwert), wenn

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \geq x_z) \geq \frac{1}{2}$$

Damit gilt dann

$$P(X \leq x_z) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X < x_z) \leq \frac{1}{2}$$

Lageparameter

F Verteilungsfunktion von X:

$$x_z \textbf{ Median von } X \Leftrightarrow F(x) \leq \tfrac{1}{2} \text{ für } x < x_z \text{ und } F(x_z) \geq \tfrac{1}{2}$$

Lageparameter

X **diskret:**

Fall 1: Es gibt kein x mit $F(x) = 0.5$

Sprungstelle, an der das Niveau 0.5 übersprungen wird $\Rightarrow$ Median eindeutig.

Fall 2: Es gibt ein x mit $F(x) = 0.5$

Da F bei diskreten Zufallsvariablen stückweise konstant ist, gibt es ein Intervall (!) $[\alpha, \beta]$ mit $F(x) = 0.5$ für alle $x \in [\alpha, \beta)$ und $F(\beta) > 0.5$. Mediane sind (beachte Unterschied zur deskriptiven Statistik!) alle Punkte des **abgeschlossenen** Intervalls $[\alpha, \beta]$.

Lageparameter

X **diskret:**

Fall 1: Es gibt kein x mit $F(x) = 0.5$

Sprungstelle, an der das Niveau 0.5 übersprungen wird $\Rightarrow$ Median eindeutig.

Fall 2: Es gibt ein x mit $F(x) = 0.5$

Da F bei diskreten Zufallsvariablen stückweise konstant ist, gibt es ein Intervall (!) $[\alpha, \beta]$ mit $F(x) = 0.5$ für alle $x \in [\alpha, \beta)$ und $F(\beta) > 0.5$. Mediane sind (beachte Unterschied zur deskriptiven Statistik!) alle Punkte des **abgeschlossenen** Intervalls $[\alpha, \beta]$.

Lageparameter

X **diskret:**

Fall 1: Es gibt kein x mit $F(x) = 0.5$

Sprungstelle, an der das Niveau 0.5 übersprungen wird $\Rightarrow$ Median eindeutig.

Fall 2: Es gibt ein x mit $F(x) = 0.5$

Da F bei diskreten Zufallsvariablen stückweise konstant ist, gibt es ein Intervall (!) $[\alpha, \beta]$ mit $F(x) = 0.5$ für alle $x \in [\alpha, \beta)$ und $F(\beta) > 0.5$. Mediane sind (beachte Unterschied zur deskriptiven Statistik!) alle Punkte des **abgeschlossenen** Intervalls $[\alpha, \beta]$.

Lageparameter

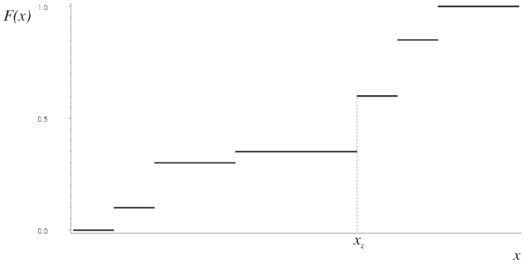

Abbildung: Median einer diskreten Zufallsvariablen (eindeutig)

Lageparameter

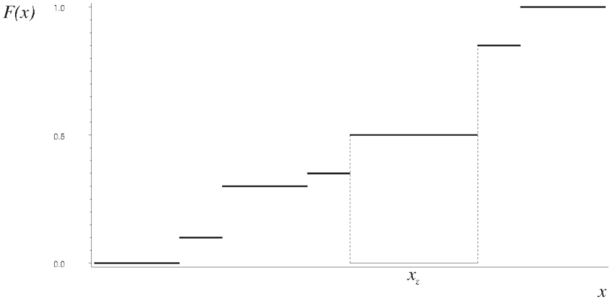

Abbildung: Median einer diskreten Zufallsvariablen (nicht eindeutig)

Lageparameter

Bestimmung mit der Verteilungsfunktion

X stetig

F ist stetig und nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Jedes x mit $F(x) = \frac{1}{2}$ heißt Median. Jedes x mit $F(x) = \alpha$ heißt α-Quantil für $0 < \alpha < 1$.

Folgerung:

x_z Median $\Rightarrow F(x_z) = P(X \leq x_z) = \frac{1}{2}$

x_α α - Quantil $\Rightarrow F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

Lageparameter

Bestimmung mit der Verteilungsfunktion

X **stetig**

F ist stetig und nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Jedes x mit $F(x) = \frac{1}{2}$ heißt Median. Jedes x mit $F(x) = \alpha$ heißt α-Quantil für $0 < \alpha < 1$.

Folgerung:

x_z Median $\Rightarrow F(x_z) = P(X \leq x_z) = \frac{1}{2}$

x_α α - Quantil $\Rightarrow F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

Lageparameter

Bestimmung mit der Verteilungsfunktion

X **stetig**

F ist stetig und nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Jedes x mit $F(x) = \frac{1}{2}$ heißt Median. Jedes x mit $F(x) = \alpha$ heißt α-Quantil für $0 < \alpha < 1$.

Folgerung:

x_z Median $\Rightarrow F(x_z) = P(X \leq x_z) = \frac{1}{2}$

x_α α - Quantil $\Rightarrow F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

Lageparameter

Bestimmung mit der Verteilungsfunktion

X **stetig**

F ist stetig und nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Jedes x mit $F(x) = \frac{1}{2}$ heißt Median. Jedes x mit $F(x) = \alpha$ heißt α-Quantil für $0 < \alpha < 1$.

Folgerung:

x_z Median $\Rightarrow F(x_z) = P(X \leq x_z) = \frac{1}{2}$

x_α α - Quantil $\Rightarrow F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

Lageparameter

X **stetig** (feinberechneter Zentralwert: $SF(x_z) = \frac{1}{2}$)

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $x \to -\infty : F(x) \to 0$
- $x \to \infty : F(x) \to 1$
- $F(x)$ stetig

Daraus folgt:
F nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, also insbesondere den Wert 0.5.

Jedes x **mit** $F(x) = 0.5$ **heißt Median**

Lageparameter

X **stetig** (feinberechneter Zentralwert: $SF(x_z) = \frac{1}{2}$)

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $x \to -\infty : F(x) \to 0$
- $x \to \infty : F(x) \to 1$
- $F(x)$ stetig

Daraus folgt:
F nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, also insbesondere den Wert 0.5.

Jedes x **mit** $F(x) = 0.5$ **heißt Median**

Lageparameter

X **stetig** (feinberechneter Zentralwert: $SF(x_z) = \frac{1}{2}$)

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $x \to -\infty : F(x) \to 0$
- $x \to \infty : F(x) \to 1$
- $F(x)$ stetig

Daraus folgt:
F nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, also insbesondere den Wert 0.5.

Jedes x **mit** $F(x) = 0.5$ **heißt Median**

Lageparameter

X **stetig** (feinberechneter Zentralwert: $SF(x_z) = \frac{1}{2}$)

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $x \to -\infty : F(x) \to 0$
- $x \to \infty : F(x) \to 1$
- $F(x)$ stetig

Daraus folgt:
F nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, also insbesondere den Wert 0.5.

Jedes x **mit** $F(x) = 0.5$ **heißt Median**

Lageparameter

X **stetig** (feinberechneter Zentralwert: $SF(x_z) = \frac{1}{2}$)

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $x \to -\infty : F(x) \to 0$
- $x \to \infty : F(x) \to 1$
- $F(x)$ stetig

Daraus folgt:
F nimmt jeden Wert zwischen 0 und 1 an, also insbesondere den Wert 0.5.

Jedes x **mit** $F(x) = 0.5$ **heißt Median**

Lageparameter

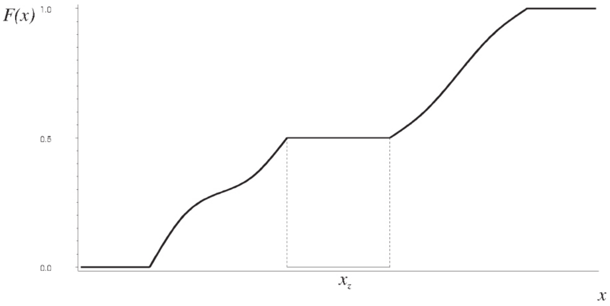

Abbildung: Median einer stetigen Zufallsvariablen (nicht eindeutig)

Beispiele:

1.) Binomialverteilung

kumulative Binomialverteilung an der Stelle c (aus Tabelle)

$$F_{n,p}(c) = \sum_{m=0}^{c} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \text{für} \quad c = 0, 1, ..., n$$

Gesucht: c minimal mit $F_{n,p}(c) \geq 0,5 \quad \Rightarrow$ Median.

Jedoch für n ungerade und $p = 0.5$: jede Zahl aus $[\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}]$ ist Median

Für $p > 0.5$ meist keine Tabellenwerte, da für $q = 1 - p$

$$F_{n,p}(c) = 1 - F_{n,q}(n - c - 1)$$

Beispiele:

1.) Binomialverteilung

kumulative Binomialverteilung an der Stelle c (aus Tabelle)

$$F_{n,p}(c) = \sum_{m=0}^{c} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \text{für} \quad c = 0, 1, ..., n$$

Gesucht: c minimal mit $F_{n,p}(c) \geq 0,5 \quad \Rightarrow$ Median.

Jedoch für n ungerade und $p = 0.5$: jede Zahl aus $[\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}]$ ist Median

Für $p > 0.5$ meist keine Tabellenwerte, da für $q = 1 - p$

$$F_{n,p}(c) = 1 - F_{n,q}(n - c - 1)$$

Weitere Parameter

X **diskret:**

x_α heißt α - Quantil für $0 < \alpha < 1$, wenn

$$P(X \leq x_\alpha) = F_X(x_\alpha) \geq \alpha$$

und

$$P(X \geq x_\alpha) = 1 - F_X(x_\alpha) \geq 1 - \alpha$$

mit dem Zusammenhang

$$P(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(X < x_\alpha) \leq \alpha$$

Weitere Parameter

X **diskret:**

x_α heißt α - Quantil für $0 < \alpha < 1$, wenn

$$P(X \leq x_\alpha) = F_X(x_\alpha) \geq \alpha$$

und

$$P(X \geq x_\alpha) = 1 - F_X(x_\alpha) \geq 1 - \alpha$$

mit dem Zusammenhang

$$P(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(X < x_\alpha) \leq \alpha$$

Weitere Parameter

Also:

Fall 1:

Es gibt **kein** x mit $F_X(x) = \alpha$
Sprungstelle, an der das Niveau α übersprungen wird, ist das α - Quantil (eindeutig).

Fall 2:

Es **gibt** ein x mit $F_X(x) = \alpha$ (selten)
Dann gibt es ein Intervall $[a, b)$ mit $F_X(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in [a, b)$.
α - Quantil sind **alle Punkte des abgeschlossenen Intervalls** $[a, b]$.

Weitere Parameter

Also:

Fall 1:

Es gibt **kein** x mit $F_X(x) = \alpha$
Sprungstelle, an der das Niveau α übersprungen wird, ist das α - Quantil (eindeutig).

Fall 2:

Es **gibt** ein x mit $F_X(x) = \alpha$ (selten)
Dann gibt es ein Intervall $[a, b)$ mit $F_X(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in [a, b)$.
α - Quantil sind **alle Punkte des abgeschlossenen Intervalls** $[a, b]$.

Beispiele:

i.) 0.95 - Quantil der **Poisson**-Verteilung mit Parameter $\lambda = 5$:
Aus der Tabelle für die kumulative Poisson-Verteilung liest man:

$$F(8) = 0.9319 \text{ und } F(9) = 0.9682$$

0.95 - Quantil ist damit 9.

ii.) 0.25 Quantil der **Binomialverteilung** mit $n = 9$ und $p = 0.75$:
Aus der Tabelle für die kumulative Binomialverteilung liest man:

$$1 - F_{9,0.75}(6) = F_{9,0.25}(2) = 0.6007 \text{ und } F_{9,0.25}(3) = 0.8343 = 1 - F_{9,0.75}(5)$$

Also: $F_{9,0.75}(6) = 0.3993$ und $F_{9,0.75}(5) = 0.1657$.

0.25-Quantil ist damit 6.

Beispiele:

i.) 0.95 - Quantil der **Poisson**-Verteilung mit Parameter $\lambda = 5$:
Aus der Tabelle für die kumulative Poisson-Verteilung liest man:

$$F(8) = 0.9319 \text{ und } F(9) = 0.9682$$

0.95 - Quantil ist damit 9.

ii.) 0.25 Quantil der **Binomialverteilung** mit $n = 9$ und $p = 0.75$:
Aus der Tabelle für die kumulative Binomialverteilung liest man:

$$1 - F_{9,0.75}(6) = F_{9,0.25}(2) = 0.6007 \text{ und } F_{9,0.25}(3) = 0.8343 = 1 - F_{9,0.75}(5)$$

Also: $F_{9,0.75}(6) = 0.3993$ und $F_{9,0.75}(5) = 0.1657$.

0.25-Quantil ist damit 6.

Beispiele:

iii.) Median

n ungerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 1 - F_{n,1-0.5}\left(n - \tfrac{n-1}{2} - 1\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{2n-n+1-2}{2}\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 0.5 \end{aligned}$$

Median ist jede Zahl von $\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n+1}{2}$
(siehe vorherigen Kommentar)

Beispiele:

iii.) Median

n ungerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 1 - F_{n,1-0.5}\left(n - \tfrac{n-1}{2} - 1\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{2n-n+1-2}{2}\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 0.5 \end{aligned}$$

Median ist jede Zahl von $\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n+1}{2}$
(siehe vorherigen Kommentar)

Beispiele:

iii.) Median

n ungerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 1 - F_{n,1-0.5}\left(n - \tfrac{n-1}{2} - 1\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{2n-n+1-2}{2}\right) \\ &= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 0.5 \end{aligned}$$

Median ist jede Zahl von $\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n+1}{2}$
(siehe vorherigen Kommentar)

Beispiele:

iii.) Median

n ungerade, $p = 0.5$:

$$
\begin{aligned}
F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 1 - F_{n,1-0.5}\left(n - \tfrac{n-1}{2} - 1\right) \\
&= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{2n-n+1-2}{2}\right) \\
&= 1 - F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow \quad F_{n,0.5}\left(\tfrac{n-1}{2}\right) &= 0.5
\end{aligned}
$$

Median ist jede Zahl von $\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n+1}{2}$
(siehe vorherigen Kommentar)

Beispiele:

iii.) Median

n gerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(n - \frac{n}{2} - 1) \\ &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) > 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \frac{n}{2}$ ist Median.

Beispiele:

iii.) Median

n gerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(n - \frac{n}{2} - 1) \\ &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) > 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\frac{n}{2}$ ist Median.

Beispiele:

iii.) Median

n gerade, $p = 0.5$:

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(n - \frac{n}{2} - 1) \\ &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) > 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) \\ &\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \frac{n}{2}$ ist Median.

Beispiele:

iii.) Median

n gerade, $p = 0.5$:

$$
\begin{aligned}
F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(n - \frac{n}{2} - 1) \\
&= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) > 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) \\
&\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < F_{n,0.5}(\frac{n}{2}) &= 1 - F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) \\
&\Rightarrow F_{n,0.5}(\frac{n}{2} - 1) < \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \frac{n}{2}$ ist Median.

Beispiele:

2.) Poissonverteilung

kumulative Poissonverteilung (aus Tabelle)

$$F_\lambda(c) = \sum_{k=0}^{c} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Gesucht analog **1.)**: c minimal mit $F_\lambda(c) \geq 0.5$.

Beispiele:

3.) Exponentialverteilung

Gesucht: x mit $F(x) = 0.5$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$$

Damit

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\lambda x = \ln \frac{1}{2} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda} \ln(2) \end{aligned}$$

Beispiele:

3.) Exponentialverteilung

Gesucht: x mit $F(x) = 0.5$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$$

Damit

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\lambda x = \ln \frac{1}{2} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda} \ln(2) \end{aligned}$$

Lageparameter

Bemerkung:

Für eine Zufallsvariable X mit **symmetrischer Dichtefunktion,** d.h.

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

ist der **Symmetriepunkt μ Median.**

(Symmetriepunkt μ halbiert die Fläche unter der Dichtefunktion)

Also: Fläche $\frac{1}{2} \Rightarrow F(\mu) = \frac{1}{2}$

Lageparameter

Bemerkung:

Für eine Zufallsvariable X mit **symmetrischer Dichtefunktion,** d.h.

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

ist der **Symmetriepunkt** μ **Median.**

(Symmetriepunkt μ halbiert die Fläche unter der Dichtefunktion)

Also: Fläche $\frac{1}{2} \Rightarrow F(\mu) = \frac{1}{2}$

Beispiele:

4.) Normalverteilung:

Parameter μ ist Median.

Abbildung: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Beispiele:

5.) Gleichverteilung

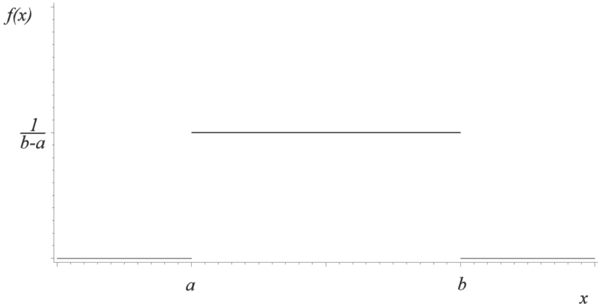

Abbildung: Dichtefunktion der Gleichverteilung auf $[a, b]$

Lageparameter

III.) Erwartungswert:

Arithmetisches Mittel aus relativer Häufigkeitsverteilung:

$$\overline{x} = \sum_{a \in M} a \cdot p(a)$$

Lageparameter

Bei **diskreter** Zufallsvariable:

Wahrscheinlichkeit (für Wert) entspricht relativer Häufigkeit (für Merkmalausprägungen)

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Werte der Zufallsvariable X ($(\alpha_i)_{i \in I}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$):

$$\sum_{i \in I} \alpha_i P(X = \alpha_i)$$

heißt **Erwartungswert** (Bezeichnung $E(X)$ oder EX), falls für $I = \mathbb{N}$ die Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid \alpha_i \mid P(X = \alpha_i)$$

konvergiert.

Lageparameter

Bei **diskreter** Zufallsvariable:

Wahrscheinlichkeit (für Wert) entspricht relativer Häufigkeit (für Merkmalausprägungen)

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Werte der Zufallsvariable X ($(\alpha_i)_{i \in I}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$):

$$\sum_{i \in I} \alpha_i P(X = \alpha_i)$$

heißt **Erwartungswert** (Bezeichnung $E(X)$ oder EX), falls für $I = \mathbb{N}$ die Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid \alpha_i \mid P(X = \alpha_i)$$

konvergiert.

Lageparameter

Bei **diskreter** Zufallsvariable:

Wahrscheinlichkeit (für Wert) entspricht relativer Häufigkeit (für Merkmalausprägungen)

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Werte der Zufallsvariable X ($(\alpha_i)_{i \in I}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$):

$$\sum_{i \in I} \alpha_i P(X = \alpha_i)$$

heißt **Erwartungswert** (Bezeichnung $E(X)$ oder EX), falls für $I = \mathbb{N}$ die Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid \alpha_i \mid P(X = \alpha_i)$$

konvergiert.

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Spiel: Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Gewinn: $2^{\text{Anzahl der Würfe}}$ (in Euro)

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= 0.5;\\
P(X=2) &= 0.5\cdot 0.5 = 0.5^2,\\
P(X=3) &= 0.5^2\cdot 0.5 = 0.5^3,\\
&\dots\\
P(X=k) &= 0.5^k.
\end{aligned}$$

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Spiel: Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Gewinn: $2^{\textit{Anzahl der Würfe}}$ (in Euro)

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5; \\ P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ &\dots \\ P(X=k) &= 0.5^k. \end{aligned}$$

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Spiel: Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Gewinn: $2^{\textit{Anzahl der Würfe}}$ (in Euro)

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5; \\ P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ &\dots \\ P(X=k) &= 0.5^k. \end{aligned}$$

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Spiel: Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Gewinn: $2^{\text{Anzahl der Würfe}}$ (in Euro)

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

$$\begin{array}{rcl} P(X=1) & = & 0.5; \\ P(X=2) & = & 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) & = & 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ & \dots & \\ P(X=k) & = & 0.5^k. \end{array}$$

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

Erwartungswert von G: (Interpretation: "Durchschnittliche Gewinne bei großer Anzahl von Wiederholungen des Spiels")

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \mid P(X = \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k}$$

konvergiert nicht, G hat keinen Erwartungswert.

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

Erwartungswert von G: (Interpretation: "Durchschnittliche Gewinne bei großer Anzahl von Wiederholungen des Spiels")

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \mid P(X = \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k}$$

konvergiert nicht, G hat keinen Erwartungswert.

Beispiel: Petersburg Paradoxon

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

Erwartungswert von G: (Interpretation: "Durchschnittliche Gewinne bei großer Anzahl von Wiederholungen des Spiels")

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \mid P(X = \alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k}$$

konvergiert nicht, G hat keinen Erwartungswert.

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) \\ &= 1 \cdot p = p = P(X=1) \end{aligned}$$

2.) Binomialverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned}$$

...

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) \\ &= 1 \cdot p = p = P(X=1) \end{aligned}$$

2.) Binomialverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned}$$

...

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) \\
&= 1 \cdot p = p = P(X=1)
\end{aligned}
$$

2.) Binomialverteilung

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}
\end{aligned}
$$

...

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) \\ &= 1 \cdot p = p = P(X=1) \end{aligned}$$

2.) Binomialverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned}$$

...

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) \\ &= 1 \cdot p = p = P(X = 1) \end{aligned}$$

2.) Binomialverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned}$$

...

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung für Werte 0 und 1

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) \\ &= 1 \cdot p = p = P(X=1) \end{aligned}$$

2.) Binomialverteilung

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned}$$

...

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= np \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} p^{m-1}(1-p)^{n-1-(m-1)} \\
&= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1,} \\
&\quad \text{da Summe über alle W.-keiten bei } \mathcal{B}(n-1,p) \\
&= np
\end{aligned}
$$

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= np \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} p^{m-1}(1-p)^{n-1-(m-1)} \\
&= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1,}
\end{aligned}
$$

da Summe über alle W.-keiten bei $\mathcal{B}(n-1, p)$

$$= np$$

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= np \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} p^{m-1}(1-p)^{n-1-(m-1)} \\
&= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1,}
\end{aligned}
$$

da Summe über alle W.-keiten bei $\mathcal{B}(n-1, p)$

$$= np$$

Beispiele

3.) Poissonverteilung

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{P(X=k)} = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}}_{=1 \quad (*)} = \lambda.$$

$(*)$ da Summe aller Wahrscheinlichkeiten

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Beispiele

Anwendung:

Anzahl der Lackierfehler pro Auto poissonverteilt mit λ=0.7. Pro Fehler 10 Minuten Nachbesserung.

Wieviele Stunden Nacharbeit pro Jahr bei 100.000 Fahrzeugen?

$E(X) = 0.7 =$ mittlere Anzahl der Fehler pro Fahrzeug

Bei 100.000 Fahrzeugen also 70.000 Fehler, mit je 10 min Nacharbeit.

700.000 min = 11.666 Stunden = 1445 Arbeitstage zu 8 Stunden = 6.4 Beschäftigte mit 225 Arbeitstagen.

Lageparameter

X **stetige** ZV mit Dichtefkt. f (analog zu Höhe h des Histogramms):

Definition:

Sei X eindeutige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann heißt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert von X, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid f(x) dx$$

existiert.

Lageparameter

X **stetige** ZV mit Dichtefkt. f (analog zu Höhe h des Histogramms):

Definition:

Sei X eindeutige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann heißt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert von X, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} | x | f(x) dx$$

existiert.

Lageparameter

X **stetige** ZV mit Dichtefkt. f (analog zu Höhe h des Histogramms):

Definition:

Sei X eindeutige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann heißt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Erwartungswert von X, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid f(x)dx$$

existiert.

Lageparameter

X **stetige** ZV mit Dichtefkt. f (analog zu Höhe h des Histogramms):

Definition:

Sei X eindeutige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann heißt

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Erwartungswert von X, falls

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid f(x)dx$$

existiert.

Beispiele

4.) Exponentialverteilung:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \; dx + \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\lim_{\alpha\to\infty} (-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\alpha)}_{=0} - \int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\lambda x} dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1} = \lim_{\alpha\to\infty} (-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\alpha) = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Beispiele

Bemerkung zu 4.):

Ist die Dichte symmetrisch um μ, so ist μ der Erwartungswert, falls dieser existiert.

5.) Normalverteilung:

Erwartungswert ist der Parameter μ.

6.) Gleichverteilung über $[\alpha, \beta]$:

Erwartungswert ist $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Beispiele

Bemerkung zu 4.):

Ist die Dichte symmetrisch um μ, so ist μ der Erwartungswert, falls dieser existiert.

5.) Normalverteilung:

Erwartungswert ist der Parameter μ.

6.) Gleichverteilung über $[\alpha, \beta]$:

Erwartungswert ist $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Beispiele

Bemerkung zu 4.):

Ist die Dichte symmetrisch um μ, so ist μ der Erwartungswert, falls dieser existiert.

5.) Normalverteilung:

Erwartungswert ist der Parameter μ.

6.) Gleichverteilung über $[\alpha, \beta]$:

Erwartungswert ist $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Streuungsparameter

Wichtigster Streuungsparameter: **Varianz**, berechnet analog zu deskriptiven Statistik.

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}$, $(\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j)$, $E(X)$ Erwartungswert von X.

Dann heißt

$$Var(X) = \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X = \alpha_i) = \sum_{i\in I}\alpha_i^2 P(X = \alpha_i) - (E(X))^2$$

Varianz von X, falls diese Reihe konvergiert.

Streuungsparameter

Wichtigster Streuungsparameter: **Varianz**, berechnet analog zu deskriptiven Statistik.

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}$, ($\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$), $E(X)$ Erwartungswert von X.

Dann heißt

$$Var(X) = \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X = \alpha_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i^2 P(X = \alpha_i) - (E(X))^2$$

Varianz von X, falls diese Reihe konvergiert.

Streuungsparameter

Wichtigster Streuungsparameter: **Varianz**, berechnet analog zu deskriptiven Statistik.

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i \in I}$, $(\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j)$, $E(X)$ Erwartungswert von X.

Dann heißt

$$Var(X) = \sum_{i \in I} (\alpha_i - E(X))^2 P(X = \alpha_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i^2 P(X = \alpha_i) - (E(X))^2$$

Varianz von X, falls diese Reihe konvergiert.

Streuungsparameter

X **stetig** mit Dichte f und Erwartungswert $E(X)$

Dann heißt

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Varianz von X, falls dieses Integral existiert.

Streuungsparameter

X **stetig** mit Dichte f und Erwartungswert $E(X)$

Dann heißt

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2
\end{aligned}
$$

Varianz von X, falls dieses Integral existiert.

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung (für Werte 0 und 1)

$p = P(X = 1)$, $\quad E(X) = p$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Bemerkung: $Var(X) \leq 0.25$

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung (für Werte 0 und 1)

$$p = P(X = 1)\ , \quad E(X) = p$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Bemerkung: $Var(X) \leq 0.25$

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung (für Werte 0 und 1)

$$p = P(X = 1) \ , \quad E(X) = p$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Bemerkung: $Var(X) \leq 0.25$

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung (für Werte 0 und 1)

$$p = P(X = 1)\ , \quad E(X) = p$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Bemerkung: $Var(X) \leq 0.25$

Beispiele

1.) Bernoulli-Verteilung (für Werte 0 und 1)

$$p = P(X = 1)\ , \quad E(X) = p$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Bemerkung: $Var(X) \leq 0.25$

Beispiele

2.) Binomialverteilung ($\mathcal{B}(n, p)$)

$$P(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}\,,\ m \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Erwartungswert: $E(X) = np$

Varianz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{m=0}^{n} (m - np)^2 \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \ldots = np(1-p) \end{aligned}$$

Beispiele

2.) Binomialverteilung ($\mathcal{B}(n,p)$)

$$P(X=m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}\ ,\ \ m \in \{0,1,\dots,n\}$$

Erwartungswert: $E(X) = np$

Varianz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{m=0}^{n} (m-np)^2 \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \ldots = np(1-p) \end{aligned}$$

Beispiele

2.) Binomialverteilung ($\mathcal{B}(n,p)$)

$$P(X=m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}\ ,\ \ m \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Erwartungswert: $E(X) = np$

Varianz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{m=0}^{n} (m-np)^2 \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \ldots = np(1-p) \end{aligned}$$

Beispiele

	P(X=k)	
k	p=0.1	p=0.5
0	0.3487	0.0010
1	0.384	0.0098
2	0.1937	0.0439
3	0.0574	0.1172
4	0.0112	0.2051
5	0.0015	0.2461
6	0.0001	0.2051
7	10^{-6}	0.1172
8	10^{-7}	0.0439
9	10^{-9}	0.0098
10	10^{-10}	0.0010

Tabelle 6.2: Binomialverteilung für $n = 10$, $p = 0.1$ und $p = 0.5$.

Beispiele

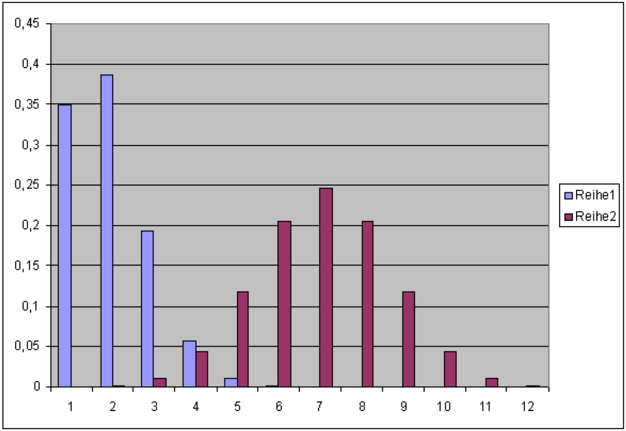

Abbildung: Reihe 1: $p = 0.1$. Reihe 2: $p = 0.5$

Beispiele

3.) Poisson-Verteilung: Erwartungswert: λ, Werte: $0, 1, 2, 3, \dots$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2 - 2k\lambda + \lambda^2) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1)+k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - 2\lambda E(X) + \lambda^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2
\end{aligned}
$$

...

Beispiele

3.) Poisson-Verteilung: Erwartungswert: λ, Werte: $0, 1, 2, 3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-2k\lambda+\lambda^2)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda E(X) + \lambda^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2
\end{aligned}
$$

...

Beispiele

3.) Poisson-Verteilung: Erwartungswert: λ, Werte: $0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-2k\lambda+\lambda^2)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda E(X) + \lambda^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2
\end{aligned}$$

...

Beispiele

3.) Poisson-Verteilung: Erwartungswert: λ, Werte: $0, 1, 2, 3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-2k\lambda+\lambda^2)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - 2\lambda E(X) + \lambda^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2
\end{aligned}
$$

...

Beispiele

3.) Poisson-Verteilung: Erwartungswert: λ, Werte: $0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2 - 2k\lambda + \lambda^2)\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - 2\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - 2\lambda E(X) + \lambda^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2
\end{aligned}$$

...

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

Erwartungswert und Varianz stimmen also bei der Poisson-Verteilung überein.

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

Erwartungswert und Varianz stimmen also bei der Poisson-Verteilung überein.

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

Erwartungswert und Varianz stimmen also bei der Poisson-Verteilung überein.

Beispiele

Beispiel für $\lambda = 0.5, \lambda = 2$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$, $\lambda = 0.5$	0.607	0.303	0.076	0.013	0.002	0.000	0.000
$P(X = k)$, $\lambda = 2$	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012

Berechnung der Varianz

Hilfssatz zur Berechnung der Varianz:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Die Varianz ist also die Differenz aus zweitem Moment und Quadrat des ersten Moments (vgl. entsprechende Formel in der deskriptiven Statistik).

Berechnung der Varianz

Hilfssatz zur Berechnung der Varianz:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Die Varianz ist also die Differenz aus zweitem Moment und Quadrat des ersten Moments (vgl. entsprechende Formel in der deskriptiven Statistik).

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}\alpha_i^2 P(X=\alpha_i) - 2E(X)\sum_{i\in I}\alpha_i P(X=\alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i\in I} P(X=\alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i \in I} (\alpha_i - E(X))^2 P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{i \in I} (\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{i \in I} \alpha_i^2 P(X = \alpha_i) - 2E(X) \sum_{i \in I} \alpha_i P(X = \alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i \in I} P(X = \alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i \in I} (\alpha_i - E(X))^2 P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{i \in I} (\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X = \alpha_i) \\
&= \sum_{i \in I} \alpha_i^2 P(X = \alpha_i) - 2E(X) \sum_{i \in I} \alpha_i P(X = \alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i \in I} P(X = \alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}\alpha_i^2 P(X=\alpha_i) - 2E(X)\sum_{i\in I}\alpha_i P(X=\alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i\in I} P(X=\alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}\alpha_i^2 P(X=\alpha_i) - 2E(X)\sum_{i\in I}\alpha_i P(X=\alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i\in I} P(X=\alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

Beweis: X **diskret**

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^2 P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\alpha_i^2 - 2\alpha_i E(X) + E(X)^2) P(X=\alpha_i) \\
&= \sum_{i\in I}\alpha_i^2 P(X=\alpha_i) - 2E(X)\sum_{i\in I}\alpha_i P(X=\alpha_i) + \\
&\quad + E(X)^2 \sum_{i\in I} P(X=\alpha_i) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

X stetig

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f(x) dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2E(X) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + E(X)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

X stetig

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + E(X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Berechnung der Varianz

X stetig

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + E(X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianz

X stetig

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + E(X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Beispiele

4.) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$

Erwartungswert: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 f(x) dx \\ &= \int_{0}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Beispiele

4.) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$

Erwartungswert: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 f(x) dx \\ &= \int_{0}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Beispiele

4.) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$

Erwartungswert: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 f(x) dx \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Beispiele

Mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Damit

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Die Varianz ist das Quadrat des Erwartungswerts.

Beispiele

Mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Damit

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Die Varianz ist das Quadrat des Erwartungswerts.

Beispiele

Mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = 2\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Damit

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Die Varianz ist das Quadrat des Erwartungswerts.

Beispiele

5.) Gleichverteilung auf $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ oder } x > b \\ \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

durch elementare Integration.

Beispiele

5.) Gleichverteilung auf $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ oder } x > b \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \tfrac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \tfrac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

durch elementare Integration.

Beispiele

5.) Gleichverteilung auf $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ oder } x > b \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \tfrac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \tfrac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

durch elementare Integration.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx \\
= \; & \int_a^b (x^2 - 2\frac{a+b}{2}x + \frac{(a+b)^2}{4}) \frac{1}{b-a} dx \\
= \; & \frac{1}{b-a}[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}x]_a^b \\
= \; & \frac{1}{b-a}(\frac{b^3}{3} - \frac{(a+b)b^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}b - \frac{a^3}{3} + \frac{(a+b)a^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4}a)
\end{aligned}
$$

...

Beispiele

...

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a}\Big(\frac{b^3}{3} - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{b^3}{4} - \frac{a^3}{3} \\
&\quad + \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}ba^2 - \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}b^2a\Big) \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{12}(4b^3 - 6ab^2 - 6b^3 + 3a^2b + 6ab^2 \\
&\quad + 3b^3 - 4a^3 + 6a^3 + 6ba^2 - 3a^3 - 6a^2b - 3b^2a) \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{b-a}\underbrace{(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3)}_{(b-a)^3} \\
&= \frac{1}{12}(b-a)^2
\end{aligned}
$$

Beispiele

6.) Normalverteilung

Parameter: μ, σ^2

Erwartungswert: μ
Varianz: σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Je größer die Varianz, desto flacher die Dichtefunktion und damit die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die reellen Zahlen.

Beispiele

6.) Normalverteilung

Parameter: μ, σ^2

Erwartungswert: μ
Varianz: σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Je größer die Varianz, desto flacher die Dichtefunktion und damit die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die reellen Zahlen.

Beispiele

6.) Normalverteilung

Parameter: μ, σ^2

Erwartungswert: μ
Varianz: σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Je größer die Varianz, desto flacher die Dichtefunktion und damit die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die reellen Zahlen.

Beispiele

6.) Normalverteilung

Parameter: μ, σ^2

Erwartungswert: μ
Varianz: σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Je größer die Varianz, desto flacher die Dichtefunktion und damit die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die reellen Zahlen.

weitere Parameter

Momente höherer Ordnung

Verallgemeinerung von Erwartungswert und Varianz

k-**tes Moment** (Verallgemeinerung des Erwartungswerts)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$E(X^k) = \sum_{i \in I} \alpha_i^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

Momente höherer Ordnung

Verallgemeinerung von Erwartungswert und Varianz

k-**tes Moment** (Verallgemeinerung des Erwartungswerts)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$E(X^k) = \sum_{i \in I} \alpha_i^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

Momente höherer Ordnung

Verallgemeinerung von Erwartungswert und Varianz

k-**tes Moment** (Verallgemeinerung des Erwartungswerts)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$E(X^k) = \sum_{i \in I} \alpha_i^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

Momente höherer Ordnung

Verallgemeinerung von Erwartungswert und Varianz

k-**tes Moment** (Verallgemeinerung des Erwartungswerts)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$E(X^k) = \sum_{i\in I} \alpha_i^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

heißt k-tes Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

Bemerkung: k-tes Moment ist Erwartungswert von X^k

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

heißt k-tes Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

Bemerkung: k-tes Moment ist Erwartungswert von X^k

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

heißt k-tes Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

Bemerkung: k-tes Moment ist Erwartungswert von X^k

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

heißt k-tes Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Der Erwartungswert ist also das erste Moment.

Bemerkung: k-tes Moment ist Erwartungswert von X^k

weitere Parameter

***k*-tes zentrales Momente** (Verallgemeinerung der Varianz)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

k-**tes zentrales Momente** (Verallgemeinerung der Varianz)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

k-**tes zentrales Momente** (Verallgemeinerung der Varianz)

X **diskret** mit Werten $(\alpha_i)_{i\in I}, \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i - E(X))^k P(X = \alpha_i)$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls die Reihe absolut konvergiert.

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Die Varianz ist das zweite zentrale Moment.

(Das erste zentrale Moment ist 0.)

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Die Varianz ist das zweite zentrale Moment.

(Das erste zentrale Moment ist 0.)

weitere Parameter

X **stetig** mit Dichtefunktion f.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

heißt k-tes zentrales Moment von X, falls das Integral absolut existiert.

Die Varianz ist das zweite zentrale Moment.

(Das erste zentrale Moment ist 0.)