Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel V - Stetige Verteilungen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Stetige Verteilungen

Definition:

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$. X heißt **stetig**, wenn es eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Folgerung:

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable ist stetig.
f_x wird unter gewissen Voraussetzungen (s.u.) Dichtefunktion genannt.

Stetige Verteilungen

Definition:

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$. X heißt **stetig**, wenn es eine Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Folgerung:

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable ist stetig.
f_x wird unter gewissen Voraussetzungen (s.u.) Dichtefunktion genannt.

Stetige Verteilungen

Beziehung zwischen Histogramm und Summenhäufigkeitsfunktion:

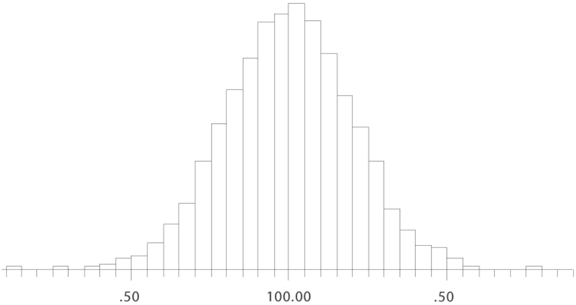

Abbildung: Histogramm

Stetige Verteilungen

Beziehung zwischen Histogramm und Summenhäufigkeitsfunktion:

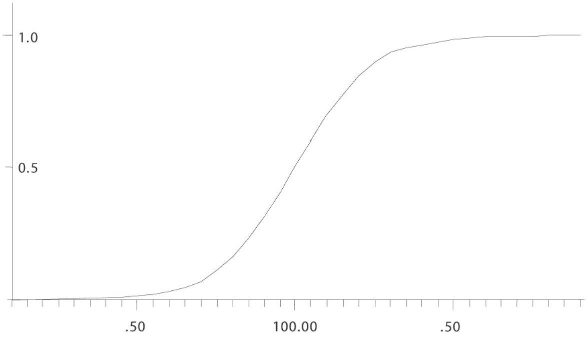

Abbildung: Summenhäufigkeitsfunktion

Analog: Beziehung zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion.

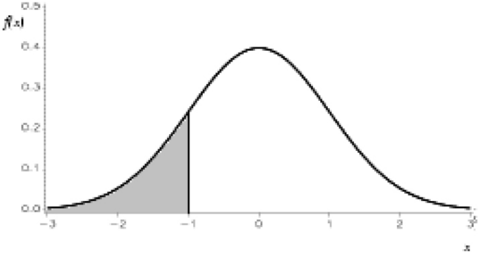

Abbildung: Dichtefunktion

Analog: Beziehung zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion.

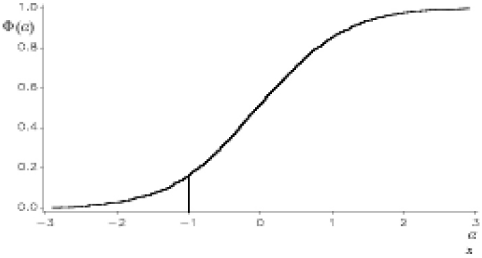

Abbildung: Verteilungsfunktion

Arten von Zufallsvariablen

1. Diskret
2. Stetig
3. Mischform (Höhe des Verlusts im *Beispiel Abfüllanlage*)

Arten von Zufallsvariablen

1. Diskret
2. Stetig
3. Mischform (Höhe des Verlusts im *Beispiel Abfüllanlage*)

Arten von Zufallsvariablen

1. Diskret
2. Stetig
3. Mischform (Höhe des Verlusts im *Beispiel Abfüllanlage*)

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

1.) <u>F_X monoton steigend</u>: Damit gibt es keine Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ und $f_X(x) < 0$ für alle $\alpha \leq x \leq \beta$, da sonst

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < 0$$

und damit

$$F_X(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < F_X(\alpha)$$

wäre.

Aber $\int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx$ wird nicht durch den Wert $f_X(x_0)$ von f_X an einer Stelle x_0 beeinflusst.

Zur Vereinfachung: Forderung $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

1.) $\underline{F_X \text{ monoton steigend}}$: Damit gibt es keine Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ und $f_X(x) < 0$ für alle $\alpha \leq x \leq \beta$, da sonst

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < 0$$

und damit

$$F_X(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < F_X(\alpha)$$

wäre.

Aber $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx$ wird nicht durch den Wert $f_X(x_0)$ von f_X an einer Stelle x_0 beeinflusst.

Zur Vereinfachung: Forderung $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

1.) F_X monoton steigend: Damit gibt es keine Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ und $f_X(x) < 0$ für alle $\alpha \leq x \leq \beta$, da sonst

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < 0$$

und damit

$$F_X(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < F_X(\alpha)$$

wäre.

Aber $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx$ wird nicht durch den Wert $f_X(x_0)$ von f_X an einer Stelle x_0 beeinflusst.

Zur Vereinfachung: Forderung $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

1.) F_X monoton steigend: Damit gibt es keine Zahlen α und β mit $\alpha < \beta$ und $f_X(x) < 0$ für alle $\alpha \leq x \leq \beta$, da sonst

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < 0$$

und damit

$$F_X(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)dx < F_X(\alpha)$$

wäre.

Aber $\int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx$ wird nicht durch den Wert $f_X(x_0)$ von f_X an einer Stelle x_0 beeinflusst.

Zur Vereinfachung: Forderung $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

2.) Aus

$$\lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = 1$$

folgt

$$\lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

(Gesamtfläche unter f ist 1)

Eigenschaften von und Forderungen an F_X

2.) Aus

$$\lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = 1$$

folgt

$$\lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

(Gesamtfläche unter f ist 1)

Eigenschaften von und Forderungen an f_X

3.) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist f_X stetig in einer Umgebung von x_0, so ist F_X differenzierbar in x_0 und

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0)$$

Daher die **Forderung**: Ist F_X in x_0 differenzierbar, dann gelte

$$f_X(x_0) = F'_X(x_0)$$

Eigenschaften von und Forderungen an f_X

3.) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist f_X stetig in einer Umgebung von x_0, so ist F_X differenzierbar in x_0 und

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0)$$

Daher die **Forderung**: Ist F_X in x_0 differenzierbar, dann gelte

$$f_X(x_0) = F'_X(x_0)$$

Definition

Sei F_X die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit

$$F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx \quad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

f_X heißt **Dichtefunktion von X**, wenn

i.) $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

ii.) für alle x, in denen F_X differenzierbar ist, gilt

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

Definition

Sei F_X die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit

$$F_X(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx \quad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

f_X heißt **Dichtefunktion von X**, wenn

i.) $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

ii.) für alle x, in denen F_X differenzierbar ist, gilt

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

Definition

Sei F_X die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit

$$F_X(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f_X(x)dx \quad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

f_X heißt **Dichtefunktion von X**, wenn

i.) $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

ii.) für alle x, in denen F_X differenzierbar ist, gilt

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

Satz: (hinreichende Bedingung)

Sei f bis auf endlich viele Stellen stetig mit den Eigenschaften

i.) $f(x) \geq 0$ für alle x;

ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

iii.) Existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, so ist $f(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$

Dann ist f Dichte einer Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

gegeben.

Satz: (hinreichende Bedingung)

Sei f bis auf endlich viele Stellen stetig mit den Eigenschaften

i.) $f(x) \geq 0$ für alle x;

ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

iii.) Existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, so ist $f(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$

Dann ist f Dichte einer Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

gegeben.

Satz: (hinreichende Bedingung)

Sei f bis auf endlich viele Stellen stetig mit den Eigenschaften

i.) $f(x) \geq 0$ für alle x;

ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

iii.) Existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, so ist $f(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$

Dann ist f Dichte einer Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

gegeben.

Satz: (hinreichende Bedingung)

Sei f bis auf endlich viele Stellen stetig mit den Eigenschaften

i.) $f(x) \geq 0$ für alle x;

ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

iii.) Existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, so ist $f(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$

Dann ist f Dichte einer Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

gegeben.

Satz: (hinreichende Bedingung)

Sei f bis auf endlich viele Stellen stetig mit den Eigenschaften

i.) $f(x) \geq 0$ für alle x;

ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

iii.) Existiert $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, so ist $f(\alpha_0) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$

Dann ist f Dichte einer Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

gegeben.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen:

a) Gleichverteilung über einem Intervall $[a, b]$

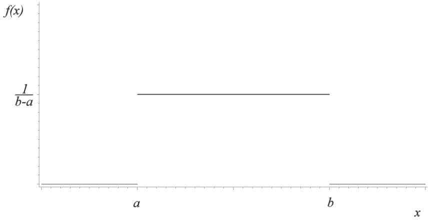

Abbildung: Dichtefunktion einer Gleichverteilung *(Rechteckverteilung)*

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen:

a) Gleichverteilung über einem Intervall $[a, b]$: *(Rechteckverteilung)*

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \textit{für} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & \textit{für} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \textit{für} \quad x > b \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist gleichmäßig über das Intervall verteilt.
Intervalle gleicher Breite in $[a, b]$ haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen:

a) Gleichverteilung über einem Intervall $[a, b]$: *(Rechteckverteilung)*

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \textit{für} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & \textit{für} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \textit{für} \quad x > b \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist gleichmäßig über das Intervall verteilt.
Intervalle gleicher Breite in $[a, b]$ haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen:

a) Gleichverteilung über einem Intervall $[a, b]$: *(Rechteckverteilung)*

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist gleichmäßig über das Intervall verteilt.
Intervalle gleicher Breite in $[a, b]$ haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

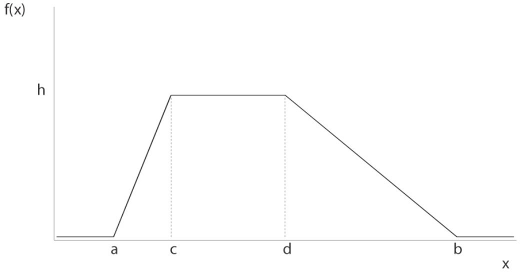

Abbildung: Dichtefunktion einer Trapezverteilung

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Fläche des Trapezes: $\frac{1}{2}(b - a + d - c) \cdot h \stackrel{!}{=} 1$

Dann $h = \frac{2}{(b-a)+(d-c)}$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{x-a}{c-a} & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} & \text{für} \quad c \leq x \leq d \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{b-x}{b-d} & \text{für} \quad d \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Fläche des Trapezes: $\frac{1}{2}(b-a+d-c)\cdot h \overset{!}{=} 1$

Dann $h = \frac{2}{(b-a)+(d-c)}$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)+(d-c)}\frac{x-a}{c-a} & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} & \text{für} \quad c \leq x \leq d \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)}\frac{b-x}{b-d} & \text{für} \quad d \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Verteilungsfunktion:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \le a \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{2(c-a)} = \frac{1}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{c-a} & \text{für} \quad a \le \alpha \le c \\ \frac{2\alpha}{b-a+d-c} + C_1 & \text{für} \quad c \le \alpha \le d \\ -\frac{1}{b-a+d-c} \frac{(b-\alpha)^2}{b-d} + C_2 & \text{für} \quad d \le \alpha \le b \\ 1 & \text{für} \quad b \le \alpha \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) <u>Geometrische Verteilungen</u>: Trapezverteilung

Verteilungsfunktion:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \leq a \\[2ex] \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{2(c-a)} = \frac{1}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{c-a} & \text{für} \quad a \leq \alpha \leq c \\[2ex] \frac{2\alpha}{b-a+d-c} + C_1 & \text{für} \quad c \leq \alpha \leq d \\[2ex] -\frac{1}{b-a+d-c} \frac{(b-\alpha)^2}{b-d} + C_2 & \text{für} \quad d \leq \alpha \leq b \\[2ex] 1 & \text{für} \quad b \leq \alpha \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Verteilungsfunktion:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \le a \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{2(c-a)} = \frac{1}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{c-a} & \text{für} \quad a \le \alpha \le c \\ \frac{2\alpha}{b-a+d-c} + C_1 & \text{für} \quad c \le \alpha \le d \\ -\frac{1}{b-a+d-c} \frac{(b-\alpha)^2}{b-d} + C_2 & \text{für} \quad d \le \alpha \le b \\ 1 & \text{für} \quad b \le \alpha \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Verteilungsfunktion:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \leq a \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{2(c-a)} = \frac{1}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{c-a} & \text{für} \quad a \leq \alpha \leq c \\ \frac{2\alpha}{b-a+d-c} + C_1 & \text{für} \quad c \leq \alpha \leq d \\ -\frac{1}{b-a+d-c} \frac{(b-\alpha)^2}{b-d} + C_2 & \text{für} \quad d \leq \alpha \leq b \\ 1 & \text{für} \quad b \leq \alpha \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Verteilungsfunktion:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \leq a \\ \frac{2}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{2(c-a)} = \frac{1}{(b-a)+(d-c)} \frac{(\alpha-a)^2}{c-a} & \text{für} \quad a \leq \alpha \leq c \\ \frac{2\alpha}{b-a+d-c} + C_1 & \text{für} \quad c \leq \alpha \leq d \\ -\frac{1}{b-a+d-c} \frac{(b-\alpha)^2}{b-d} + C_2 & \text{für} \quad d \leq \alpha \leq b \\ 1 & \text{für} \quad b \leq \alpha \end{cases}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Die Konstanten C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, dass die Funktion stetig ist. Dies betrifft die Stellen c, d und b.

$$\alpha = c: \qquad \frac{1}{b-a+d-c}\frac{(c-a)^2}{c-a} = \frac{2c}{b-a+d-c} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{-c-a}{b-a+d-c}$$

$$\alpha = b: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-b)^2}{b-d} + C_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 1$$

$$\alpha = d: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-d)^2}{b-d} + 1 = \frac{2d-c-a}{b-a+d-c}$$

Mit den Werten für C_1 und C_2 ist F in d stetig.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Die Konstanten C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, dass die Funktion stetig ist. Dies betrifft die Stellen c, d und b.

$$\alpha = c: \qquad \frac{1}{b-a+d-c}\frac{(c-a)^2}{c-a} = \frac{2c}{b-a+d-c} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{-c-a}{b-a+d-c}$$

$$\alpha = b: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-b)^2}{b-d} + C_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 1$$

$$\alpha = d: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-d)^2}{b-d} + 1 = \frac{2d-c-a}{b-a+d-c}$$

Mit den Werten für C_1 und C_2 ist F in d stetig.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Die Konstanten C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, dass die Funktion stetig ist. Dies betrifft die Stellen c, d und b.

$$\alpha = c: \qquad \frac{1}{b-a+d-c}\frac{(c-a)^2}{c-a} = \frac{2c}{b-a+d-c} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{-c-a}{b-a+d-c}$$

$$\alpha = b: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-b)^2}{b-d} + C_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 1$$

$$\alpha = d: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-d)^2}{b-d} + 1 = \frac{2d-c-a}{b-a+d-c}$$

Mit den Werten für C_1 und C_2 ist F in d stetig.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Die Konstanten C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, dass die Funktion stetig ist. Dies betrifft die Stellen c, d und b.

$$\alpha = c: \qquad \frac{1}{b-a+d-c}\frac{(c-a)^2}{c-a} = \frac{2c}{b-a+d-c} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{-c-a}{b-a+d-c}$$

$$\alpha = b: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-b)^2}{b-d} + C_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 1$$

$$\alpha = d: \qquad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-d)^2}{b-d} + 1 = \frac{2d-c-a}{b-a+d-c}$$

Mit den Werten für C_1 und C_2 ist F in d stetig.

Beispiele stetiger Verteilungen

1.) Geometrische Verteilungen: Trapezverteilung

Die Konstanten C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, dass die Funktion stetig ist. Dies betrifft die Stellen c, d und b.

$$\alpha = c: \quad \frac{1}{b-a+d-c}\frac{(c-a)^2}{c-a} = \frac{2c}{b-a+d-c} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{-c-a}{b-a+d-c}$$

$$\alpha = b: \quad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-b)^2}{b-d} + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\alpha = d: \quad -\frac{1}{b-a+d-c}\frac{(b-d)^2}{b-d} + 1 = \frac{2d-c-a}{b-a+d-c}$$

Mit den Werten für C_1 und C_2 ist F in d stetig.

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, $Exp(\lambda)$.

Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = 0 \\ \alpha \geq 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda \alpha} \end{aligned}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, $Exp(\lambda)$.

Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = 0 \\ \alpha \geq 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda\alpha} \end{aligned}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, $Exp(\lambda)$.

Verteilungsfunktion:

$$\alpha < 0 \quad : \qquad F(\alpha) = 0$$

$$\alpha \geq 0 \quad : \qquad F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda\alpha}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, $Exp(\lambda)$.

Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \alpha < 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = 0 \\ \alpha \geq 0 \quad &: \qquad F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda\alpha} \end{aligned}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

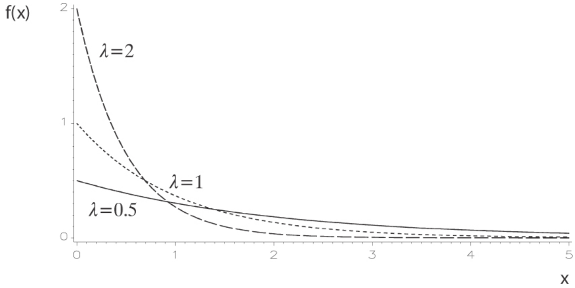

Abbildung: Dichtefunktion der Exponentialverteilung ...

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

Beispiele stetiger Verteilungen

2.) Exponentialverteilung

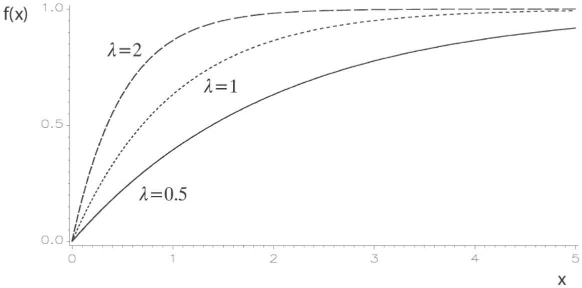

Abbildung: ...und zugehörige Verteilungsfunktionen für $\lambda = 2, 1, 0.5$

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Dichte der **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und σ^2, wobei $\sigma > 0$, $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$f(x)$ ist symmetrisch um μ.

Dichte der **Standardnormalverteilung**, Parameter $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $(\mathcal{N}(0, 1))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Dichte der **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und σ^2, wobei $\sigma > 0$, $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$f(x)$ ist symmetrisch um μ.

Dichte der **Standardnormalverteilung**, Parameter $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $(\mathcal{N}(0,1))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Dichte der **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und σ^2, wobei $\sigma > 0$, $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$f(x)$ ist symmetrisch um μ.

Dichte der **Standardnormalverteilung**, Parameter $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $(\mathcal{N}(0, 1))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Dichte der **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und σ^2, wobei $\sigma > 0$, $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$f(x)$ ist symmetrisch um μ.

Dichte der **Standardnormalverteilung**, Parameter $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $(\mathcal{N}(0, 1))$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Abbildung: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

Beispiele stetiger Verteilungen

3.) Normalverteilung:

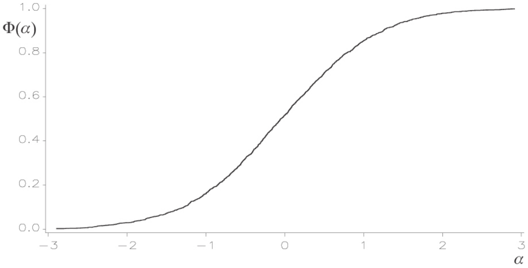

Abbildung: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung