Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel IV - Spezielle Verteilungen: Diskrete Verteilungen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Einleitung

S: Statistische Masse vom Umfang N.

Merkmal mit 2 Ausprägungen, binär codierbar (z.B. weiblich (1), männlich (0)).

1.) Zufällige Entnahme einer statistischen Einheit ($\Omega = S, \omega \in \Omega = S$)

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E} \\ 0 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E nicht} \end{cases}$$

2.) Stichprobe vom Umfang n aus der statistischen Masse S

- ohne Zurücklegen
- mit Zurücklegen

Einleitung

S: Statistische Masse vom Umfang N.

Merkmal mit 2 Ausprägungen, binär codierbar (z.B. weiblich (1), männlich (0)).

1.) Zufällige Entnahme einer statistischen Einheit ($\Omega = S, \omega \in \Omega = S$)

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E} \\ 0 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E nicht} \end{cases}$$

2.) Stichprobe vom Umfang n aus der statistischen Masse S

- ohne Zurücklegen
- mit Zurücklegen

Einleitung

S: Statistische Masse vom Umfang N.

Merkmal mit 2 Ausprägungen, binär codierbar (z.B. weiblich (1), männlich (0)).

1.) Zufällige Entnahme einer statistischen Einheit
($\Omega = S, \omega \in \Omega = S$)

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E} \\ 0 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E nicht} \end{cases}$$

2.) Stichprobe vom Umfang n aus der statistischen Masse S
- ohne Zurücklegen
- mit Zurücklegen

Einleitung

S: Statistische Masse vom Umfang N.

Merkmal mit 2 Ausprägungen, binär codierbar (z.B. weiblich (1), männlich (0)).

1.) Zufällige Entnahme einer statistischen Einheit
($\Omega = S, \omega \in \Omega = S$)

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E} \\ 0 & \omega \quad \text{hat Eigenschaft E nicht} \end{cases}$$

2.) Stichprobe vom Umfang n aus der statistischen Masse S
- ohne Zurücklegen
- mit Zurücklegen

Bernoulli-Verteilung

Zu 1.):

X nimmt nur die Werte 0 und 1 an (*dichotome* Zufallsvariable).

Anwendung:

Beschreibung von Grundgesamtheiten, deren Elemente eine Eigenschaft haben ($X(\omega) = 1$, wenn ω die Eigenschaft hat) oder nicht haben ($X(\omega) = 0$, wenn ω die Eigenschaft nicht hat).

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{mit} \quad p \in [0, 1]$$

"Bernoulli-Verteilung"; X heißt Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Bernoulli-Verteilung

Zu 1.):

X nimmt nur die Werte 0 und 1 an (*dichotome* Zufallsvariable).

Anwendung:

Beschreibung von Grundgesamtheiten, deren Elemente eine Eigenschaft haben ($X(\omega) = 1$, wenn ω die Eigenschaft hat) oder nicht haben ($X(\omega) = 0$, wenn ω die Eigenschaft nicht hat).

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{mit} \quad p \in [0, 1]$$

"Bernoulli-Verteilung"; X heißt Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Bernoulli-Verteilung

Zu 1.):

X nimmt nur die Werte 0 und 1 an (*dichotome* Zufallsvariable).

Anwendung:

Beschreibung von Grundgesamtheiten, deren Elemente eine Eigenschaft haben ($X(\omega) = 1$, wenn ω die Eigenschaft hat) oder nicht haben ($X(\omega) = 0$, wenn ω die Eigenschaft nicht hat).

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{mit} \quad p \in [0, 1]$$

"Bernoulli-Verteilung"; X heißt Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **ohne** Zurücklegen aus einer statistischen Masse.

N - Umfang der statistischen Masse
M - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse ($M = pN$)
p - Anteil der Einheiten mit der Eigenschaft E in der statistischen Masse
n - Stichprobenumfang
X - Anzahl der Einheiten mit der Eigenschaft E in der Stichprobe (Zufallsvariable)

Stichprobe ohne Zurücklegen

Dann gilt

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \quad \textit{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

“Hypergeometrische Verteilung”

X heißt hypergeometrisch-verteilt mit N, M, n, p

Hypergeometrische Verteilung: Beispiel

$N = 100, \quad M = 10, \quad n = 5$

m	0	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	0.583	0.339	0.070	0.006	0.0003	10^{-6}

Hypergeometrische Verteilung: Beispiel

$N = 100, \quad M = 10, \quad n = 5$

m	0	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	0.583	0.339	0.070	0.006	0.0003	10^{-6}

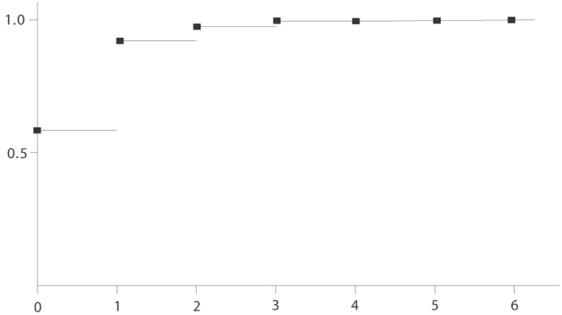


Abbildung: Verteilungsfunktion

Stichprobe mit Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **mit** Zurücklegen aus einer statistischen Masse (wie bei Bernoulli-Verteilung).

- p - relative Häufigkeit (Anteil) der Elemente in der statistischen Masse mit der Eigenschaft E
- n - Stichprobenumfang
- X - Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit der Eigenschaft E

Stichprobe mit Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **mit** Zurücklegen aus einer statistischen Masse (wie bei Bernoulli-Verteilung).

p - relative Häufigkeit (Anteil) der Elemente in der statistischen Masse mit der Eigenschaft E

n - Stichprobenumfang

X - Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit der Eigenschaft E

Stichprobe mit Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **mit** Zurücklegen aus einer statistischen Masse (wie bei Bernoulli-Verteilung).

- p - relative Häufigkeit (Anteil) der Elemente in der statistischen Masse mit der Eigenschaft E
- n - Stichprobenumfang
- X - Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit der Eigenschaft E

Stichprobe mit Zurücklegen

Zu 2.):

Ziehen einer Stichprobe **mit** Zurücklegen aus einer statistischen Masse (wie bei Bernoulli-Verteilung).

- p - relative Häufigkeit (Anteil) der Elemente in der statistischen Masse mit der Eigenschaft E
- n - Stichprobenumfang
- X - Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit der Eigenschaft E

Binomialverteilung

$\binom{n}{m}$ - Auswahlmöglichkeiten der Komponenten des Stichprobenvektors für die Elemente mit Eigenschaft E

p - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Elementes mit Eigenschaft E bei einmaligem Ziehen

p^m - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von m Elementen mit Eigenschaft E bei m-maligem Ziehen

$(1-p)^{n-m}$ - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der $(n-m)$ Elemente ohne Eigenschaft E bei Ziehen der restlichen Elemente

Binomialverteilung

$\binom{n}{m}$ - Auswahlmöglichkeiten der Komponenten des Stichprobenvektors für die Elemente mit Eigenschaft E

p - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Elementes mit Eigenschaft E bei einmaligem Ziehen

p^m - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von m Elementen mit Eigenschaft E bei m-maligem Ziehen

$(1-p)^{n-m}$ - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der $(n-m)$ Elemente ohne Eigenschaft E bei Ziehen der restlichen Elemente

Binomialverteilung

$\binom{n}{m}$ - Auswahlmöglichkeiten der Komponenten des Stichprobenvektors für die Elemente mit Eigenschaft E

p - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Elementes mit Eigenschaft E bei einmaligem Ziehen

p^m - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von m Elementen mit Eigenschaft E bei m-maligem Ziehen

$(1-p)^{n-m}$ - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der $(n-m)$ Elemente ohne Eigenschaft E bei Ziehen der restlichen Elemente

Binomialverteilung

$\binom{n}{m}$ - Auswahlmöglichkeiten der Komponenten des Stichprobenvektors für die Elemente mit Eigenschaft E

p - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Elementes mit Eigenschaft E bei einmaligem Ziehen

p^m - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von m Elementen mit Eigenschaft E bei m-maligem Ziehen

$(1-p)^{n-m}$ - Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der $(n-m)$ Elemente ohne Eigenschaft E bei Ziehen der restlichen Elemente

Binomialverteilung

Dann gilt:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n$$

X heißt binomialverteilt mit n und p ($\mathcal{B}(n, p)$).

Anmerkung: Bernoulli-Verteilung ist $\mathcal{B}(1, p)$

Binomialverteilung: Beispiel

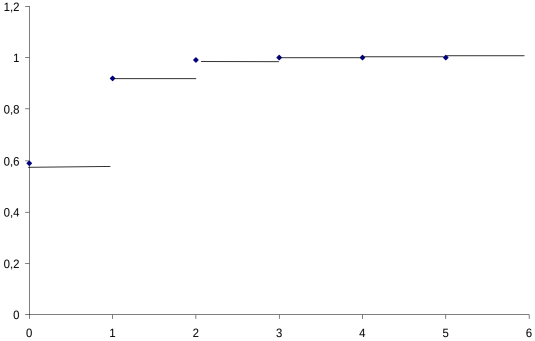
$n = 5, \quad p = 0.1$:

m	0	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	0.590	0.328	0.073	0.008	$4.5 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}

Binomialverteilung: Beispiel

$n = 5, \quad p = 0.1$:

m	0	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	0.590	0.328	0.073	0.008	$4.5 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}



Binomialverteilung: Beispiel

Anmerkung:

Ziehen von Stichproben mit Zurücklegen wird man in der Praxis nicht durchführen, da der Informationsgewinn geringer ist als bei Stichproben ohne Zurücklegen.

Binomialverteilung

Vorteile der Binomialverteilung gegenüber der hypergeometrischen Verteilung:

- N geht in die Verteilung nicht ein
- Die Berechnung von Potenzen ist einfacher als von Binomialkoeffizienten
- Die Werte sind für alle $p \in [0,1]$ definiert und nicht nur für Brüche M/N

Bei kleinem *Auswahlsatz* $\frac{n}{N}$ ist Unterschied zwischen Stichproben mit und ohne Zurücklegen gering: *Binomialverteilung kann als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden für* $\frac{n}{N} \leq 0.05 \quad$ (*bzw.* ≤ 0.1)

Binomialverteilung

Vorteile der Binomialverteilung gegenüber der hypergeometrischen Verteilung:

- N geht in die Verteilung nicht ein
- Die Berechnung von Potenzen ist einfacher als von Binomialkoeffizienten
- Die Werte sind für alle $p \in [0, 1]$ definiert und nicht nur für Brüche M/N

Bei kleinem *Auswahlsatz* $\frac{n}{N}$ ist Unterschied zwischen Stichproben mit und ohne Zurücklegen gering: *Binomialverteilung kann als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden für* $\frac{n}{N} \leq 0.05 \quad$ (*bzw.* ≤ 0.1)

Binomialverteilung

Vorteile der Binomialverteilung gegenüber der hypergeometrischen Verteilung:

- N geht in die Verteilung nicht ein
- Die Berechnung von Potenzen ist einfacher als von Binomialkoeffizienten
- Die Werte sind für alle $p \in [0, 1]$ definiert und nicht nur für Brüche M/N

Bei kleinem *Auswahlsatz* $\frac{n}{N}$ ist Unterschied zwischen Stichproben mit und ohne Zurücklegen gering: *Binomialverteilung kann als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden für* $\frac{n}{N} \leq 0.05 \quad$ (*bzw.* ≤ 0.1)

Binomialverteilung

Vorteile der Binomialverteilung gegenüber der hypergeometrischen Verteilung:

- N geht in die Verteilung nicht ein
- Die Berechnung von Potenzen ist einfacher als von Binomialkoeffizienten
- Die Werte sind für alle $p \in [0, 1]$ definiert und nicht nur für Brüche M/N

Bei kleinem *Auswahlsatz* $\frac{n}{N}$ ist Unterschied zwischen Stichproben mit und ohne Zurücklegen gering: *Binomialverteilung kann als Näherung für die hypergeometrische Verteilung verwendet werden für* $\frac{n}{N} \leq 0.05 \quad (\textit{bzw.} \ \leq 0.1)$

Poisson-Verteilung

Anwendung:

Modellierung der Anzahl von Ereignissen bei einem Zufallsprozeß (z.B. Anzahl der Fehler an einem Produkt).

$\lambda > 0$ - prozessspezifischer Parameter
X - Anzahl der Ereignisse (Zufallsvariable)

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \textit{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

"Poisson-Verteilung"

X heißt Poisson-verteilt mit λ ($Poi(\lambda)$).

Poisson-Verteilung

Anwendung:

Modellierung der Anzahl von Ereignissen bei einem Zufallsprozeß (z.B. Anzahl der Fehler an einem Produkt).

$\lambda > 0$ - prozessspezifischer Parameter
X - Anzahl der Ereignisse (Zufallsvariable)

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

"Poisson-Verteilung"

X heißt Poisson-verteilt mit λ ($Poi(\lambda)$).

Poisson-Verteilung

Anwendung:

Modellierung der Anzahl von Ereignissen bei einem Zufallsprozeß (z.B. Anzahl der Fehler an einem Produkt).

$\lambda > 0$ - prozessspezifischer Parameter
X - Anzahl der Ereignisse (Zufallsvariable)

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \textit{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

"Poisson-Verteilung"

X heißt Poisson-verteilt mit λ ($Poi(\lambda)$).

Poisson-Verteilung

Anwendung:

Modellierung der Anzahl von Ereignissen bei einem Zufallsprozeß (z.B. Anzahl der Fehler an einem Produkt).

$\lambda > 0$ - prozessspezifischer Parameter
X - Anzahl der Ereignisse (Zufallsvariable)

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \textit{für} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

"Poisson-Verteilung"

X heißt Poisson-verteilt mit λ ($Poi(\lambda)$).

Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung entsteht aus der Binomialverteilung beim Grenzübergang

$$n \to \infty \quad mit \quad p_n = \frac{\lambda}{n}$$

Daher: Poisson-Verteilung ist Näherung der Binomialverteilung für großes n und kleines p ($n \geq 50$ und $p \leq 0.1$).

Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung entsteht aus der Binomialverteilung beim Grenzübergang

$$n \to \infty \quad mit \quad p_n = \frac{\lambda}{n}$$

Daher: Poisson-Verteilung ist Näherung der Binomialverteilung für großes n und kleines p ($n \geq 50$ und $p \leq 0.1$).

Poisson-Verteilung

Beispiel:

$\lambda = n \cdot p = 5 \cdot 0.1 = 0.5$

m	0	1	2	3	4	5
$P(X = m)$	0.607	0.303	0.076	0.013	0.002	10^{-4}

Stichproben
mit Zurücklegen:

Binomialverteilung

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Näherung, falls } n \le 0.05N$$

Stichproben ohne
Zurücklegen:

Hypergeometrische Verteilung

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Zählprozesse: **Poisson-Verteilung**

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$\downarrow$ *Näherung, falls* $n \geq 50,\ p \leq 0.1,\quad \lambda = np$

Stichproben mit Zurücklegen: **Binomialverteilung**

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$\downarrow$ *Näherung, falls* $n \leq 0.05N$

Stichproben ohne Zurücklegen: **Hypergeometrische Verteilung**

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Diskrete Verteilung allgemein

$X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable

X heißt **diskret**, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (Werte von X) gibt mit

$$X(\omega) \in \{\alpha_i | i = 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega, \text{ und } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j$$

Sei $\quad p_i = P(X = \alpha_i) \quad \textit{für} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad$ dann gilt

1.) $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, \dots$

2.) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Diskrete Verteilung allgemein

$X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable

X heißt **diskret**, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (Werte von X) gibt mit

$X(\omega) \in \{\alpha_i | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ für alle $\omega \in \Omega$, und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

Sei $p_i = P(X = \alpha_i)$ *für* $i = 1, 2, 3, \ldots$ dann gilt

1.) $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

2.) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Diskrete Verteilung allgemein

$X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable

X heißt **diskret**, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (Werte von X) gibt mit

$X(\omega) \in \{\alpha_i | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ für alle $\omega \in \Omega$, und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

Sei $\quad p_i = P(X = \alpha_i) \quad$ *für* $\quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad$ dann gilt

1.) $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

2.) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Diskrete Verteilung allgemein

$X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable

X heißt **diskret**, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (Werte von X) gibt mit

$X(\omega) \in \{\alpha_i | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ für alle $\omega \in \Omega$, und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

Sei $p_i = P(X = \alpha_i)$ *für* $i = 1, 2, 3, \ldots$ dann gilt

1.) $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

2.) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Diskrete Verteilung allgemein

$X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable

X heißt **diskret**, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (Werte von X) gibt mit

$X(\omega) \in \{\alpha_i | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ für alle $\omega \in \Omega$, und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

Sei $p_i = P(X = \alpha_i)$ *für* $i = 1, 2, 3, \ldots$ dann gilt

1.) $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

2.) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Diskrete Verteilung allgemein

Umgekehrt gibt es zu

- Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$
- Folge (p_i) mit 1.) und 2.)

eine Zufallsvariable X mit

$$P(X = \alpha_i) = p_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Diskrete Verteilung allgemein

Umgekehrt gibt es zu

- Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$
- Folge (p_i) mit 1.) und 2.)

eine Zufallsvariable X mit

$$P(X = \alpha_i) = p_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Diskrete Verteilung allgemein

Umgekehrt gibt es zu

- Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$
- Folge (p_i) mit 1.) und 2.)

eine Zufallsvariable X mit

$$P(X = \alpha_i) = p_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Diskrete Verteilung allgemein

Umgekehrt gibt es zu

- Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$
- Folge (p_i) mit 1.) und 2.)

eine Zufallsvariable X mit

$$P(X = \alpha_i) = p_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Diskrete Verteilung allgemein

$$F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} P(X = \alpha_i) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} p_i$$

Diskrete Verteilung allgemein

$$F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} P(X = \alpha_i) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} p_i$$

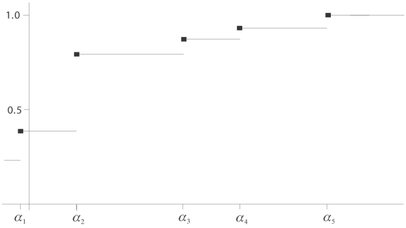


Abbildung: Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen

Diskrete Verteilung allgemein

$$F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} P(X = \alpha_i) = \sum_{\alpha_i \leq \alpha} p_i$$

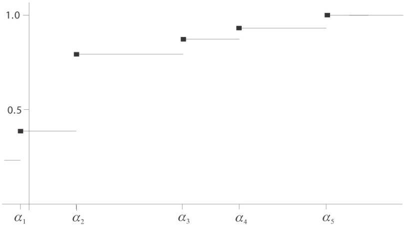


Abbildung: Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen

Man beachte die Ähnlichkeit zur empirischen Verteilungsfunktion.

Beispiel: Münze

Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

Gewinn: 2^X in Euro

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5, \\ P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ &\dots \\ P(X=k) &= 0.5^k \end{aligned}$$

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

Beispiel: Münze

Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

Gewinn: 2^X in Euro

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= 0.5,\\
P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2,\\
P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3,\\
&\dots\\
P(X=k) &= 0.5^k
\end{aligned}$$

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G=2^k) = P(X=k) = \frac{1}{2^k}$$

Beispiel: Münze

Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

Gewinn: 2^X in Euro

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5, \\ P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ &\dots \\ P(X=k) &= 0.5^k \end{aligned}$$

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

Beispiel: Münze

Eine Münze wird geworfen, bis erstmals Zahl erscheint.

Zufallsvariable X: Anzahl der Würfe

Gewinn: 2^X in Euro

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5, \\ P(X=2) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2, \\ P(X=3) &= 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5^3, \\ &\ldots \\ P(X=k) &= 0.5^k \end{aligned}$$

Zufallsvariable G: Gewinn

$$P(G = 2^k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$