Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel III - Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Zufallsvariable

Variable:

Größe, die verschiedene Werte annehmen kann: $x, y, \ldots$

Zufallsvariable:

Variable, deren Wert vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängt: $X, Y, \ldots$

Zufallsvariable

Variable:

Größe, die verschiedene Werte annehmen kann: $x, y, \ldots$

Zufallsvariable:

Variable, deren Wert vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängt: X, Y,...

Zufallsvariable

1. Zufallsprozess, modelliert durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\ \Omega, A(\Omega), P\ )$
2. Jeder Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$
3. Wert der Zufallsvariable hängt ab vom Ausgang ω
4. Wir betrachten zu jedem ω den zugehörigen Wert $X(\omega)$ der Zufallsvariablen, d.h. die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (bei reellwertigen Zufallsvariablen)

Frage: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X einen Wert in einem Bereich A der reellen Zahlen an?*

Zufallsvariable

1. Zufallsprozess, modelliert durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\ \Omega, A(\Omega), P\ )$
2. Jeder Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$
3. Wert der Zufallsvariable hängt ab vom Ausgang ω
4. Wir betrachten zu jedem ω den zugehörigen Wert $X(\omega)$ der Zufallsvariablen, d.h. die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (bei reellwertigen Zufallsvariablen)

Frage: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X einen Wert in einem Bereich A der reellen Zahlen an?*

Zufallsvariable

1. Zufallsprozess, modelliert durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\ \Omega, A(\Omega), P\ )$
2. Jeder Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$
3. Wert der Zufallsvariable hängt ab vom Ausgang ω
4. Wir betrachten zu jedem ω den zugehörigen Wert $X(\omega)$ der Zufallsvariablen, d.h. die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (bei reellwertigen Zufallsvariablen)

Frage: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X einen Wert in einem Bereich A der reellen Zahlen an?*

Zufallsvariable

1. Zufallsprozess, modelliert durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\ \Omega, A(\Omega), P\ )$
2. Jeder Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$
3. Wert der Zufallsvariable hängt ab vom Ausgang ω
4. Wir betrachten zu jedem ω den zugehörigen Wert $X(\omega)$ der Zufallsvariablen, d.h. die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (bei reellwertigen Zufallsvariablen)

Frage: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X einen Wert in einem Bereich A der reellen Zahlen an?*

Zufallsvariable

1. Zufallsprozess, modelliert durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\ \Omega, A(\Omega), P\ )$
2. Jeder Ausgang des Zufallsexperiments ist ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$
3. Wert der Zufallsvariable hängt ab vom Ausgang ω
4. Wir betrachten zu jedem ω den zugehörigen Wert $X(\omega)$ der Zufallsvariablen, d.h. die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (bei reellwertigen Zufallsvariablen)

Frage: *Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsvariable X einen Wert in einem Bereich A der reellen Zahlen an?*

Beispiel: Lackiererei

Anzahl der Lackierfehler	Absolute Häufigkeit
0	257
1	64
2	16
3	8
4	5
$\sum$	350

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega) =$ Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega) =$ Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Zufällige Entnahme eines PKW:

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{350}\}$
- σ-Algebra der Ereignisse: $A(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Zu einer Karosse ω_i sei $b(\omega_i)$ die Anzahl der Lackierfehler dieser Karosse:

$$b : \Omega \to \mathbb{N} \cup 0 \quad \textit{(Merkmal auf der statistischen Masse } \Omega\textit{)}$$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaliger zufälliger Entnahme eine Karosse mit k Lackierfehlern zu erhalten?

Zu k sei $b^{-1}(k) = \{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}$ die *Urbildmenge von k bei b*: Menge der Karossen mit k Lackierfehlern.

Für $b^{-1}(k) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P(b^{-1}(k)) &= P(\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}) = \frac{\#\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}}{\#\Omega} \\ &= \frac{h(k)}{\#\Omega} = p(k) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für 2 Fehler:

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad P(b^{-1}(k)) = \frac{16}{350}$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaliger zufälliger Entnahme eine Karosse mit k Lackierfehlern zu erhalten?

Zu k sei $b^{-1}(k) = \{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}$ die *Urbildmenge von k bei b*: Menge der Karossen mit k Lackierfehlern.

Für $b^{-1}(k) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P(b^{-1}(k)) &= P(\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}) = \frac{\#\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}}{\#\Omega} \\ &= \frac{h(k)}{\#\Omega} = p(k) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für 2 Fehler:

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad P(b^{-1}(k)) = \frac{16}{350}$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaliger zufälliger Entnahme eine Karosse mit k Lackierfehlern zu erhalten?

Zu k sei $b^{-1}(k) = \{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}$ die *Urbildmenge von k bei b*: Menge der Karossen mit k Lackierfehlern.

Für $b^{-1}(k) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P(b^{-1}(k)) &= P(\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}) = \frac{\#\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}}{\#\Omega} \\ &= \frac{h(k)}{\#\Omega} = p(k) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für 2 Fehler:

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad P(b^{-1}(k)) = \frac{16}{350}$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaliger zufälliger Entnahme eine Karosse mit k Lackierfehlern zu erhalten?

Zu k sei $b^{-1}(k) = \{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}$ die *Urbildmenge von k bei b*: Menge der Karossen mit k Lackierfehlern.

Für $b^{-1}(k) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P(b^{-1}(k)) &= P(\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}) = \frac{\#\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}}{\#\Omega} \\ &= \frac{h(k)}{\#\Omega} = p(k) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für 2 Fehler:

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad P(b^{-1}(k)) = \frac{16}{350}$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaliger zufälliger Entnahme eine Karosse mit k Lackierfehlern zu erhalten?

Zu k sei $b^{-1}(k) = \{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}$ die *Urbildmenge von k bei b*: Menge der Karossen mit k Lackierfehlern.

Für $b^{-1}(k) \subset \Omega$:

$$
\begin{aligned}
P(b^{-1}(k)) &= P(\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}) = \frac{\#\{\omega_i \in \Omega | b(\omega_i) = k\}}{\#\Omega} \\
&= \frac{h(k)}{\#\Omega} = p(k)
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeit für 2 Fehler:

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad P(b^{-1}(k)) = \frac{16}{350}$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fehler vorliegt, also Nacharbeit erforderlich ist?

$\{1, 2, 3, 4\}$ ist die Menge der dabei möglichen Anzahl von Fehlern und

$$b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\omega_i \in \Omega \mid b(\omega_i) \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

(Menge der Karossen mit 1,2,3 oder 4 Fehlern)

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fehler ist also:

$$P(b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})) = \frac{\#b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})}{350} = \frac{64 + 16 + 8 + 5}{350} = \frac{93}{350}$$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fehler vorliegt, also Nacharbeit erforderlich ist?

$\{1, 2, 3, 4\}$ ist die Menge der dabei möglichen Anzahl von Fehlern und

$$b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{\omega_i \in \Omega \mid b(\omega_i) \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

(Menge der Karossen mit 1,2,3 oder 4 Fehlern)

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fehler ist also:

$$P(b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})) = \frac{\#b^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})}{350} = \frac{64 + 16 + 8 + 5}{350} = \frac{93}{350}$$

Beispiel: Lackiererei

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Fehler vorliegt, also Nacharbeit erforderlich ist?

$\{1,2,3,4\}$ ist die Menge der dabei möglichen Anzahl von Fehlern und

$$b^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{\omega_i \in \Omega \mid b(\omega_i) \in \{1,2,3,4\}\}$$

(Menge der Karossen mit 1,2,3 oder 4 Fehlern)

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fehler ist also:

$$P(b^{-1}(\{1,2,3,4\})) = \frac{\#b^{-1}(\{1,2,3,4\})}{350} = \frac{64+16+8+5}{350} = \frac{93}{350}$$

Allgemeine Vorgehensweise

Gegeben:

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$ *(Modellierung des Zufallsprozesses)*
- Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert von X in einer Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$?

Zu einer Teilmenge R der reellen Zahlen betrachten wir die Urbildmenge bei X:

$$X^{-1}(R) = \{\omega \in \Omega \quad | \quad X(\omega) \in R\} \subset \Omega$$

(Menge der Elementarereignisse, die zu einem Wert von X in R führen)

Allgemeine Vorgehensweise

Gegeben:

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$ *(Modellierung des Zufallsprozesses)*
- Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert von X in einer Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$?

Zu einer Teilmenge R der reellen Zahlen betrachten wir die Urbildmenge bei X:

$$X^{-1}(R) = \{\omega \in \Omega \quad | \quad X(\omega) \in R\} \subset \Omega$$

(Menge der Elementarereignisse, die zu einem Wert von X in R führen)

Allgemeine Vorgehensweise

Gegeben:

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$ *(Modellierung des Zufallsprozesses)*
- Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert von X in einer Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$?

Zu einer Teilmenge R der reellen Zahlen betrachten wir die Urbildmenge bei X:

$$X^{-1}(R) = \{\omega \in \Omega \quad | \quad X(\omega) \in R\} \subset \Omega$$

(Menge der Elementarereignisse, die zu einem Wert von X in R führen)

Allgemeine Vorgehensweise

Gegeben:

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$ *(Modellierung des Zufallsprozesses)*
- Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert von X in einer Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$?

Zu einer Teilmenge R der reellen Zahlen betrachten wir die Urbildmenge bei X:

$$X^{-1}(R) = \{\omega \in \Omega \quad | \quad X(\omega) \in R\} \subset \Omega$$

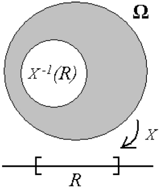
(Menge der Elementarereignisse, die zu einem Wert von X in R führen)

Allgemeine Vorgehensweise

Falls $X^{-1}(R)$ im Mengensystem $A(\Omega)$ enthalten ist, gibt es die Wahrscheinlichkeit $P(X^{-1}(R))$ dafür, **dass** X **einen Wert in** R hat.

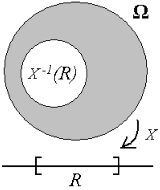
Allgemeine Vorgehensweise

Falls $X^{-1}(R)$ im Mengensystem $A(\Omega)$ enthalten ist, gibt es die Wahrscheinlichkeit $P(X^{-1}(R))$ dafür, **dass** X **einen Wert in** R hat.



Allgemeine Vorgehensweise

Falls $X^{-1}(R)$ im Mengensystem $A(\Omega)$ enthalten ist, gibt es die Wahrscheinlichkeit $P(X^{-1}(R))$ dafür, **dass** X **einen Wert in** R hat.



Frage: *Wann ist* $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$*?*

Allgemeine Vorgehensweise

Zu $X : \Omega \to \mathbb{R}$:

a) Ω endlich oder abzählbar unendlich, $A(\Omega) =$ Potenzmenge von $\Omega : X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ für alle R

b) $\Omega = \mathbb{R}$: Es gibt komplizierte Teilmengen, für die keine Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Deshalb: Wir nehmen nicht die Potenzmenge, sondern beschränken uns auf:

   1.) $A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.

   2.) R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.
   (es gibt Teilmengen aus $\mathbb{R}$, die nicht in $A(\Omega)$ sind, sie wären aber in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).)

Folgerung: R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.

$\Omega = \mathbb{R}$, A(Ω) σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$

Es gibt jedoch komplizierte Funktionen X mit $X^{-1}(R) \notin \mathcal{L}$ für ein $R \in \mathcal{L}$. Diese X werden jedoch ausgeschlossen.

Allgemeine Vorgehensweise

<u>Zu $X : \Omega \to \mathbb{R}$</u>:

a) Ω endlich oder abzählbar unendlich, $A(\Omega) =$ Potenzmenge von $\Omega : X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ für alle R

b) $\Omega = \mathbb{R}$: Es gibt komplizierte Teilmengen, für die keine Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Deshalb: Wir nehmen nicht die Potenzmenge, sondern beschränken uns auf:

   1.) $A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.
   2.) R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.
   (es gibt Teilmengen aus $\mathbb{R}$, die nicht in $A(\Omega)$ sind, sie wären aber in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).)

<u>Folgerung</u>: R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.

$\Omega = \mathbb{R}$, A(Ω) σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$

Es gibt jedoch komplizierte Funktionen X mit $X^{-1}(R) \notin \mathcal{L}$ für ein $R \in \mathcal{L}$. Diese X werden jedoch ausgeschlossen.

Allgemeine Vorgehensweise

Zu $X : \Omega \to \mathbb{R}$:

a) Ω endlich oder abzählbar unendlich, $A(\Omega) =$ Potenzmenge von $\Omega : X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ für alle R

b) $\Omega = \mathbb{R}$: Es gibt komplizierte Teilmengen, für die keine Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Deshalb: Wir nehmen nicht die Potenzmenge, sondern beschränken uns auf:

   1.) $A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.
   2.) R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.
   (es gibt Teilmengen aus $\mathbb{R}$, die nicht in $A(\Omega)$ sind, sie wären aber in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$).)

Folgerung: R aus σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$.

$\Omega = \mathbb{R}$, A(Ω) σ-Algebra der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$

Es gibt jedoch komplizierte Funktionen X mit $X^{-1}(R) \notin \mathcal{L}$ für ein $R \in \mathcal{L}$. Diese X werden jedoch ausgeschlossen.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge $X^{-1}(R)$ ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge $X^{-1}(R)$ ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge $X^{-1}(R)$ ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge $X^{-1}(R)$ ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge $R \subset \mathbb{R}$, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge $X^{-1}(R)$ ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen $\mathcal{L}$?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Allgemeine Vorgehensweise: Fragen

1. *Wann ist* $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$*?*

   Hängt ab von R und X.

2. *Wann ist für eine Borelsche Menge* R $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$*?*

   $A(\Omega)$ Potenzmenge von Ω: immer erfüllt (aber manchmal zu umfangreich), wenn $\Omega = \mathbb{R}, A(\Omega)$ σ-Algebra der Borelschen Mengen: dann ist $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung der reellen Zahlen in die reellen Zahlen.

3. *Ist für jede Teilmenge* $R \subset \mathbb{R}$*, die aus dem Mengensystem der Borelschen Mengen ist, die Urbildmenge* $X^{-1}(R)$ *ebenfalls im Mengensystem der Borelschen Mengen* $\mathcal{L}$*?*

   Wenn *ja*, dann heißt die Abbildung X **messbar**.

Zufallsvariable

Definition: **Zufallsvariable**

Sei $(\Omega, A(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable**, wenn für jede Borelsche Menge R die Urbildmenge $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ ist, d.h. bei $A(\Omega) = \mathcal{L}$ wenn X messbar ist.

Zufallsvariable

Definition: **Zufallsvariable**

Sei $(\Omega, A(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable**, wenn für jede Borelsche Menge R die Urbildmenge $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ ist, d.h. bei $A(\Omega) = \mathcal{L}$ wenn X messbar ist.

Zufallsvariable

Definition: **Zufallsvariable**

Sei $(\Omega, A(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable**, wenn für jede Borelsche Menge R die Urbildmenge $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$ ist, d.h. bei $A(\Omega) = \mathcal{L}$ wenn X messbar ist.

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die reellen Zahlen:

1. $R \subset \mathbb{R}$
2. $R \in \mathcal{L} \to X^{-1}(R) \subset \Omega \quad$ und $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$
3. *($X^{-1}(R)$ - Urbildmenge von R bei X)*
4. $P(X^{-1}(R))$ *- Wahrscheinlichkeit des Urbilds von R bei X*

Definition:

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R))$$

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß (induziert durch X).

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ **liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die reellen Zahlen:**

1. $R \subset \mathbb{R}$
2. $R \in \mathcal{L} \to X^{-1}(R) \subset \Omega \quad$ und $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$
3. *($X^{-1}(R)$ - Urbildmenge von R bei X)*
4. $P(X^{-1}(R))$ *- Wahrscheinlichkeit des Urbilds von R bei X*

Definition:

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R))$$

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß (induziert durch X).

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ **liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die reellen Zahlen:**

1. $R \subset \mathbb{R}$
2. $R \in \mathcal{L} \to X^{-1}(R) \subset \Omega \quad$ und $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$
3. *($X^{-1}(R)$ - Urbildmenge von R bei X)*
4. $P(X^{-1}(R)) \quad$ *- Wahrscheinlichkeit des Urbilds von R bei X*

Definition:

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R))$$

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß (induziert durch X).

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die reellen Zahlen:

1. $R \subset \mathbb{R}$
2. $R \in \mathcal{L} \to X^{-1}(R) \subset \Omega$ und $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$
3. *($X^{-1}(R)$ - Urbildmenge von R bei X)*
4. $P(X^{-1}(R))$ *- Wahrscheinlichkeit des Urbilds von R bei X*

Definition:

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R))$$

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß (induziert durch X).

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : (\Omega, A(\Omega), P) \to \mathbb{R}$ **liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß für die reellen Zahlen:**

1. $R \subset \mathbb{R}$
2. $R \in \mathcal{L} \to X^{-1}(R) \subset \Omega$ und $X^{-1}(R) \in A(\Omega)$
3. *($X^{-1}(R)$ - Urbildmenge von R bei X)*
4. $P(X^{-1}(R))$ *- Wahrscheinlichkeit des Urbilds von R bei X*

Definition:

$$P_X(R) = P(X^{-1}(R))$$

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß (induziert durch X).

Zufallsvariable

Beweis:

1.) $P_X(R) = P(X^{-1}(R)) \geq 0$, da P Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

2.) $R_i \subset \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ mit $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X^{-1}(R_i) \cap X^{-1}(R_j) &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i\} \cap \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_j\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i \cap R_j\}\} = \emptyset \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(R_i) \end{aligned}$$

(Urbild der Vereinigung = Vereinigung der Urbilder)

Zufallsvariable

Beweis:

1.) $P_X(R) = P(X^{-1}(R)) \geq 0$, da P Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

2.) $R_i \subset \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ mit $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X^{-1}(R_i) \cap X^{-1}(R_j) &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i\} \cap \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_j\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i \cap R_j\}\} = \emptyset \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(R_i) \end{aligned}$$

(Urbild der Vereinigung = Vereinigung der Urbilder)

Zufallsvariable

Beweis:

1.) $P_X(R) = P(X^{-1}(R)) \geq 0$, da P Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

2.) $R_i \subset \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ mit $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X^{-1}(R_i) \cap X^{-1}(R_j) &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i\} \cap \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_j\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega | \{X(\omega) \in R_i \cap R_j\}\} = \emptyset \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in R_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(R_i) \end{aligned}$$

(Urbild der Vereinigung = Vereinigung der Urbilder)

Zufallsvariable

Beweis (Fortsetzung):

Damit ist

$$\begin{aligned} P_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i) &= P(X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(R_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(R_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(R_i) \end{aligned}$$

Zufallsvariable

3.) $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$
P_X heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.**

P_X ist eindeutig festgelegt durch die Werte
$F_X(\alpha) = P_X((-\infty, \alpha]) = P(X^{-1}((-\infty, \alpha]))$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\quad F_X(\alpha) = P_X((-\infty, \alpha])$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
heißt **Verteilungsfunktion von X.**

Zufallsvariable

Übliche Schreibweisen:

$$\text{“}X \in B\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}(B) \subset \Omega$$

$$\text{“}X \leq \alpha\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}((-\infty, \alpha])$$

$$\text{“}\alpha \leq X \leq \beta\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}([\alpha, \beta])$$

Damit auch:

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &= P(X^{-1}((-\infty, \alpha])) = P_X((-\infty, \alpha]) \\ P(X \in B) &= P(X^{-1}(B)) = P_X(B) \\ P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(X^{-1}([\alpha, \beta])) = P_X([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

Zufallsvariable

Übliche Schreibweisen:

$$\text{“}X \in B\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}(B) \subset \Omega$$
$$\text{“}X \leq \alpha\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}((-\infty, \alpha])$$
$$\text{“}\alpha \leq X \leq \beta\text{“} \quad \text{für} \quad X^{-1}([\alpha, \beta])$$

Damit auch:

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &= P(X^{-1}((-\infty, \alpha])) = P_X((-\infty, \alpha]) \\ P(X \in B) &= P(X^{-1}(B)) = P_X(B) \\ P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(X^{-1}([\alpha, \beta])) = P_X([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

Zufallsvariable

<u>**Übliche Schreibweisen:**</u>

$$\begin{aligned} \text{“}X \in B\text{“} \quad & \text{für} \quad X^{-1}(B) \subset \Omega \\ \text{“}X \leq \alpha\text{“} \quad & \text{für} \quad X^{-1}((-\infty, \alpha]) \\ \text{“}\alpha \leq X \leq \beta\text{“} \quad & \text{für} \quad X^{-1}([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

Damit auch:

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &= P(X^{-1}((-\infty, \alpha])) = P_X((-\infty, \alpha]) \\ P(X \in B) &= P(X^{-1}(B)) = P_X(B) \\ P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(X^{-1}([\alpha, \beta])) = P_X([\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X:

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F_X(\alpha) = P_X((-\infty, \alpha]) = P(X \leq \alpha) = P(X^{-1}((-\infty, \alpha]))$$

Durch die Verteilungsfunktion F_X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X eindeutig festgelegt.

Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X:

$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$F_X(\alpha) = P_X((-\infty, \alpha]) = P(X \leq \alpha) = P(X^{-1}((-\infty, \alpha]))$$

Durch die Verteilungsfunktion F_X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X eindeutig festgelegt.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- F_X ist monoton steigend.
- $\lim_{\alpha \to -\infty} F_X(\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = 1$
- F_X ist von rechts stetig:

  $$\lim_{\alpha \to \alpha_0, \alpha \geq \alpha_0} F_X(\alpha) = F(\alpha_0)$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- F_X ist monoton steigend.
- $\lim_{\alpha \to -\infty} F_X(\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = 1$
- F_X ist von rechts stetig:

  $$\lim_{\alpha \to \alpha_0, \alpha \geq \alpha_0} F_X(\alpha) = F(\alpha_0)$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- F_X ist monoton steigend.
- $\lim_{\alpha \to -\infty} F_X(\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha \to \infty} F_X(\alpha) = 1$
- F_X ist von rechts stetig:

  $$\lim_{\alpha \to \alpha_0, \alpha \geq \alpha_0} F_X(\alpha) = F(\alpha_0)$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Bemerkungen:

1. Zu jeder Funktion F mit den Eigenschaften 1.-3. kann man (*analog Beispiel 4 aus Paragraph 1*) eine Zufallsvariable konstruieren, so dass F Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen ist.
2. Häufig interessiert nur die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, nicht aber der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$. Man spricht dann einfach von der "**Zufallsvariablen** X **mit der Verteilungsfunktion** F_X". Durch F_X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X festgelegt. Damit ist berechenbar, mit welcher Wahrscheinlichkeit X einen Wert in einem vorgegebenen Bereich annimmt.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Bemerkungen:

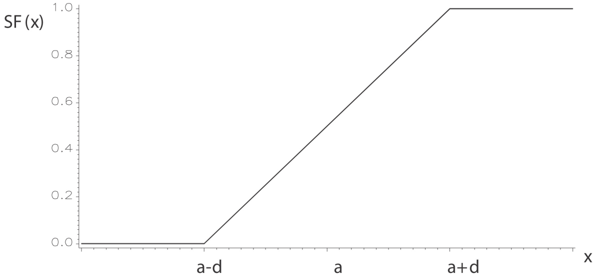
1. Zu jeder Funktion F mit den Eigenschaften 1.-3. kann man (*analog Beispiel 4 aus Paragraph 1*) eine Zufallsvariable konstruieren, so dass F Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen ist.
2. Häufig interessiert nur die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, nicht aber der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, A(\Omega), P)$. Man spricht dann einfach von der "**Zufallsvariablen** X **mit der Verteilungsfunktion** F_X". Durch F_X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X festgelegt. Damit ist berechenbar, mit welcher Wahrscheinlichkeit X einen Wert in einem vorgegebenen Bereich annimmt.

Beispiel: Abfüllanlage

Für die abgefüllte Quantität liegt die folgende Summenhäufigkeitsfunktion vor:

Beispiel: Abfüllanlage

Für die abgefüllte Quantität liegt die folgende Summenhäufigkeitsfunktion vor:



Beispiel: Abfüllanlage

Dabei ist a das Sollgewicht. Es gilt:

$$SF(x) = \begin{cases} 0 & x < a-d \\ \frac{1}{2d}(x-a+d) & a-d \leq x \leq a+d \\ 1 & a+d < x \end{cases}$$

Bei jeder weiteren abgefüllten Packung ist durch $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ die **Wahrscheinlichkeit für ein Abfüllgewicht von höchstens** α gegeben.
Bei einem Untergewicht tritt ein Verlust auf.

$\circledast$ *Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Höhe des Verlusts?*

Beispiel: Abfüllanlage

Dabei ist a das Sollgewicht. Es gilt:

$$SF(x) = \begin{cases} 0 & x < a - d \\ \frac{1}{2d}(x - a + d) & a - d \leq x \leq a + d \\ 1 & a + d < x \end{cases}$$

Bei jeder weiteren abgefüllten Packung ist durch $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ die **Wahrscheinlichkeit für ein Abfüllgewicht von höchstens** α gegeben.
Bei einem Untergewicht tritt ein Verlust auf.

⊛ *Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Höhe des Verlusts?*

Beispiel: Abfüllanlage

Dabei ist a das Sollgewicht. Es gilt:

$$SF(x) = \begin{cases} 0 & x < a - d \\ \frac{1}{2d}(x - a + d) & a - d \leq x \leq a + d \\ 1 & a + d < x \end{cases}$$

Bei jeder weiteren abgefüllten Packung ist durch $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ die **Wahrscheinlichkeit für ein Abfüllgewicht von höchstens** α gegeben.
Bei einem Untergewicht tritt ein Verlust auf.

⊛ *Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Höhe des Verlusts?*

Beispiel: Abfüllanlage

Dabei ist a das Sollgewicht. Es gilt:

$$SF(x) = \begin{cases} 0 & x < a - d \\ \frac{1}{2d}(x - a + d) & a - d \leq x \leq a + d \\ 1 & a + d < x \end{cases}$$

Bei jeder weiteren abgefüllten Packung ist durch $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ die **Wahrscheinlichkeit für ein Abfüllgewicht von höchstens** α gegeben.
Bei einem Untergewicht tritt ein Verlust auf.

$\circledast$ *Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Höhe des Verlusts?*

Beispiel: Abfüllanlage

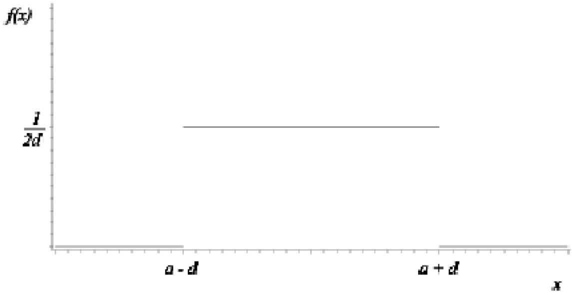
Zu der oben angegebenen Summenhäufigkeitsfunktion gehört das folgende Histogramm mit der Häufigkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & a - d \leq x \leq a + d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Zu der oben angegebenen Summenhäufigkeitsfunktion gehört das folgende Histogramm mit der Häufigkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & a - d \leq x \leq a + d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel: Abfüllanlage

Zusammenhang: $SF(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Sollgewicht: $a \Rightarrow$ Bei Untergewicht entsteht ein Verlust: Untergewicht falls $x \leq a$, x - Abfüllgewicht bei einer Packung, dann $x \leq a$ - Verlust in Höhe von $(a-x)^2$

Verlustfunktion:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ (a-x)^2 = (x-a)^2 & x < a \end{cases}$$

Die Höhe des Verlusts hängt vom Zufallsvorgang "Abfüllen" mit dem Abfüllgewicht x als Ergebnis ab, ist also Zufallsvariable.

Beispiel: Abfüllanlage

Zusammenhang: $SF(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Sollgewicht: $a \Rightarrow$ Bei Untergewicht entsteht ein Verlust:
Untergewicht falls $x \leq a$, x - Abfüllgewicht bei einer Packung, dann $x \leq a$ - Verlust in Höhe von $(a - x)^2$

Verlustfunktion:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ (a-x)^2 = (x-a)^2 & x < a \end{cases}$$

Die Höhe des Verlusts hängt vom Zufallsvorgang "Abfüllen" mit dem Abfüllgewicht x als Ergebnis ab, ist also Zufallsvariable.

Beispiel: Abfüllanlage

Zusammenhang: $SF(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Sollgewicht: $a \Rightarrow$ Bei Untergewicht entsteht ein Verlust:
Untergewicht falls $x \leq a$, x - Abfüllgewicht bei einer Packung,
dann $x \leq a$ - Verlust in Höhe von $(a - x)^2$

Verlustfunktion:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ (a - x)^2 = (x - a)^2 & x < a \end{cases}$$

Die Höhe des Verlusts hängt vom Zufallsvorgang "Abfüllen" mit dem Abfüllgewicht x als Ergebnis ab, ist also Zufallsvariable.

Beispiel: Abfüllanlage

Zusammenhang: $SF(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Sollgewicht: $a \Rightarrow$ Bei Untergewicht entsteht ein Verlust:
Untergewicht falls $x \leq a$, x - Abfüllgewicht bei einer Packung, dann $x \leq a$ - Verlust in Höhe von $(a-x)^2$

Verlustfunktion:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ (a-x)^2 = (x-a)^2 & x < a \end{cases}$$

Die Höhe des Verlusts hängt vom Zufallsvorgang "Abfüllen" mit dem Abfüllgewicht x als Ergebnis ab, ist also Zufallsvariable.

Beispiel: Abfüllanlage

Zusammenhang: $SF(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz$

Sollgewicht: $a \Rightarrow$ Bei Untergewicht entsteht ein Verlust:
Untergewicht falls $x \leq a$, x - Abfüllgewicht bei einer Packung, dann $x \leq a$ - Verlust in Höhe von $(a-x)^2$

Verlustfunktion:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ (a-x)^2 = (x-a)^2 & x < a \end{cases}$$

Die Höhe des Verlusts hängt vom Zufallsvorgang "Abfüllen" mit dem Abfüllgewicht x als Ergebnis ab, ist also Zufallsvariable.

Beispiel: Abfüllanlage

Verlust bei Abfüllgewicht x:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ (x-a)^2 & x \leq a \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α, also im Bereich $(-\infty, \alpha]$?

Urbildmenge von $(-\infty, \alpha]$ bei V:

$$V^{-1}((-\infty, \alpha]) = \begin{cases} \emptyset & \alpha < 0 \\ [a, \infty) & \alpha = 0 \\ [a - \sqrt{\alpha}, \infty) & \alpha > 0 \end{cases}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Verlust bei Abfüllgewicht x:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ (x-a)^2 & x \leq a \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α, also im Bereich $(-\infty, \alpha]$?

Urbildmenge von $(-\infty, \alpha]$ bei V:

$$V^{-1}((-\infty, \alpha]) = \begin{cases} \emptyset & \alpha < 0 \\ [a, \infty) & \alpha = 0 \\ [a - \sqrt{\alpha}, \infty) & \alpha > 0 \end{cases}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Verlust bei Abfüllgewicht x:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ (x-a)^2 & x \leq a \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α, also im Bereich $(-\infty, \alpha]$?

Urbildmenge von $(-\infty, \alpha]$ bei V:

$$V^{-1}((-\infty, \alpha]) = \begin{cases} \emptyset & \alpha < 0 \\ [a, \infty) & \alpha = 0 \\ [a - \sqrt{\alpha}, \infty) & \alpha > 0 \end{cases}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Gesucht:

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlusts, d.h. Verteilungsfunktion $F_V(\alpha)$ = Wahrscheinlichkeit für einen Verlust $\leq \alpha$.

Verlust in Höhe von α entsteht:

bei $\alpha < 0$: nie

bei $\alpha = 0$: falls Abfüllgewicht $x \geq a$

bei $\alpha > 0$: falls $(x-a)^2 = \alpha$ und $x < a$

Beispiel: Abfüllanlage

Gesucht:

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlusts, d.h. Verteilungsfunktion $F_V(\alpha)$ = Wahrscheinlichkeit für einen Verlust $\leq \alpha$.

Verlust in Höhe von α entsteht:

bei $\alpha < 0$: nie

bei $\alpha = 0$: falls Abfüllgewicht $x \geq a$

bei $\alpha > 0$: falls $(x-a)^2 = \alpha$ und $x < a$

Beispiel: Abfüllanlage

Gesucht:

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlusts, d.h. Verteilungsfunktion $F_V(\alpha) =$ Wahrscheinlichkeit für einen Verlust $\leq \alpha$.

Verlust in Höhe von α entsteht:

bei $\alpha < 0$: nie

bei $\alpha = 0$: falls Abfüllgewicht $x \geq a$

bei $\alpha > 0$: falls $(x - a)^2 = \alpha$ und $x < a$

Beispiel: Abfüllanlage

Gesucht:

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlusts, d.h. Verteilungsfunktion $F_V(\alpha) =$ Wahrscheinlichkeit für einen Verlust $\leq \alpha$.

Verlust in Höhe von α entsteht:

bei $\alpha < 0$: nie

bei $\alpha = 0$: falls Abfüllgewicht $x \geq a$

bei $\alpha > 0$: falls $(x - a)^2 = \alpha$ und $x < a$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α

bei $\alpha < 0$:

$$P_V((-\infty, \alpha]) = P(V^{-1}((-\infty, \alpha])) = P(\emptyset) = 0$$

bei $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} P_V((-\infty, 0]) &= P(V^{-1}((-\infty, 0])) = P([a, \infty)) \\ &= 1 - P((-\infty, a]) = 1 - SF(a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α

bei $\alpha < 0$:

$$P_V((-\infty,\alpha]) = P(V^{-1}((-\infty,\alpha])) = P(\emptyset) = 0$$

bei $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} P_V((-\infty,0]) &= P(V^{-1}((-\infty,0])) = P([a,\infty)) \\ &= 1 - P((-\infty,a]) = 1 - SF(a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α

bei $\alpha < 0$:

$$P_V((-\infty, \alpha]) = P(V^{-1}((-\infty, \alpha])) = P(\emptyset) = 0$$

bei $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} P_V((-\infty, 0]) &= P(V^{-1}((-\infty, 0])) = P([a, \infty)) \\ &= 1 - P((-\infty, a]) = 1 - SF(a) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von höchstens α

bei $\alpha > 0$:

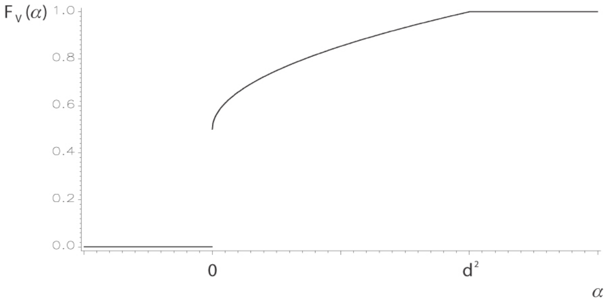
$$\begin{aligned} P_V((-\infty, \alpha]) &= P(V^{-1}((-\infty, \alpha])) = P([a - \sqrt{\alpha}, \infty)) \\ &= 1 - P((-\infty, a - \sqrt{\alpha})) = 1 - SF(a - \sqrt{\alpha}) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2d}(a - \sqrt{\alpha} - a + d) & \text{falls} \quad \sqrt{\alpha} \le d \\ 1 & \text{falls} \quad d < \sqrt{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Schaden $\leq \alpha$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Schaden $\leq \alpha$



Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Schaden $\leq \alpha$:

Die Verteilungsfunktion der Schadenshöhe V hat damit den Verlauf:

$$F_V(\alpha) = P_V((-\infty, \alpha]) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{1}{2} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2d} & 0 < \alpha \leq d^2 \\ 1 & d^2 < \alpha \end{cases}$$

Beispiel: Abfüllanlage

Wahrscheinlichkeit für einen Schaden $\leq \alpha$:

Die Verteilungsfunktion der Schadenshöhe V hat damit den Verlauf:

$$F_V(\alpha) = P_V((-\infty, \alpha]) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \frac{1}{2} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2d} & 0 < \alpha \leq d^2 \\ 1 & d^2 < \alpha \end{cases}$$

Zufallsvariable (reellwertig)

Zusammenfassung:

1.)
- Eine Zufallsvariable X ist eine Größe, deren Wert vom Ergebnis eines Zufallsprozess abhängt. Nach Modellierung des Zufallsprozesses durch einen Wahrscheinlichkeitsraum hängt demnach der Wert der Zufallsvariablen vom (eingetretenen) Elementarereignis ab. X ist also eine Funktion.
- Definitionsbereich ist die Grundgesamtheit des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariable (reellwertig)

Zusammenfassung:

1.)
- Eine Zufallsvariable X ist eine Größe, deren Wert vom Ergebnis eines Zufallsprozess abhängt. Nach Modellierung des Zufallsprozesses durch einen Wahrscheinlichkeitsraum hängt demnach der Wert der Zufallsvariablen vom (eingetretenen) Elementarereignis ab. X ist also eine Funktion.
- Definitionsbereich ist die Grundgesamtheit des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen. $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariable (reellwertig)

Zusammenfassung:

1.)

- Eine Zufallsvariable X ist eine Größe, deren Wert vom Ergebnis eines Zufallsprozess abhängt. Nach Modellierung des Zufallsprozesses durch einen Wahrscheinlichkeitsraum hängt demnach der Wert der Zufallsvariablen vom (eingetretenen) Elementarereignis ab. X ist also eine Funktion.
- Definitionsbereich ist die Grundgesamtheit des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen.
  $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariable (reellwertig)

2.)

- Da der Wert der Zufallsvariablen vom eingetretenen Elementarereignis eines Zufallsprozesses abhängt, kann auch der Wert selbst als Elementarereignis aufgefasst werden. Man erhält so einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Menge der reellen Zahlen als Grundgesamtheit.
- Das Wahrscheinlichkeitsmaß dieses Wahrscheinlichkeitsraums heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung von** X.

Zufallsvariable (reellwertig)

2.)
- Da der Wert der Zufallsvariablen vom eingetretenen Elementarereignis eines Zufallsprozesses abhängt, kann auch der Wert selbst als Elementarereignis aufgefasst werden. Man erhält so einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Menge der reellen Zahlen als Grundgesamtheit.
- Das Wahrscheinlichkeitsmaß dieses Wahrscheinlichkeitsraums heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung von** X.

Zufallsvariable (reellwertig)

3.)
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist vollständig beschrieben durch die Wahrscheinlichkeiten für die Bereiche
$$(-\infty, x], \quad x \in \mathbb{R}.$$
- Diese werden zusammengestellt in der Verteilungsfunktion
$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

Zufallsvariable (reellwertig)

3.)

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist vollständig beschrieben durch die Wahrscheinlichkeiten für die Bereiche
$$(-\infty, x], \quad x \in \mathbb{R}.$$
- Diese werden zusammengestellt in der Verteilungsfunktion
$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$