Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)
Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel II - Wahrscheinlichkeitsraum

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus 3 Komponenten:

- Grundgesamtheit Ω (Menge der *Elementarereignisse*)
- Mengensystem der *Ereignisse* $A(\Omega)$
- *Wahrscheinlichkeitsmaß* (ordnet jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu)

Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus 3 Komponenten:

- Grundgesamtheit Ω (Menge der *Elementarereignisse*)
- Mengensystem der *Ereignisse* $A(\Omega)$
- *Wahrscheinlichkeitsmaß* (ordnet jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu)

Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus 3 Komponenten:

- Grundgesamtheit Ω (Menge der *Elementarereignisse*)
- Mengensystem der *Ereignisse* $A(\Omega)$
- *Wahrscheinlichkeitsmaß* (ordnet jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu)

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

Forderungen an die Komponenten:

1.) Grundgesamtheit: $\Omega \neq \emptyset$

2.) Mengensystem der Ereignisse:

- $\Omega \in A(\Omega)$ (*"sicheres Ereignis"*)
- $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
- $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Wahrscheinlichkeitsraum

3.) Wahrscheinlichkeitsmaß:

- $P(A) \geq 0$ *für alle Ereignisse A*
- $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt, d.h.: $(A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j)$,

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsraum

3.) Wahrscheinlichkeitsmaß:

- $P(A) \geq 0$ *für alle Ereignisse A*
- $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt, d.h.: $(A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j)$,

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsraum

3.) Wahrscheinlichkeitsmaß:

- $P(A) \geq 0$ *für alle Ereignisse* A
- $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt, d.h.: $(A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j)$,

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsraum

3.) Wahrscheinlichkeitsmaß:

- $P(A) \geq 0$ *für alle Ereignisse* A
- $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt, d.h.: $(A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j)$,

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $P(\Omega) = 1$

σ-Algebren

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $A(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt σ-**Algebra**, wenn sie die Eigenschaften erfüllt.

1. $\Omega \in A(\Omega)$
2. $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
3. $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Eigenschaft 3 heißt auch σ-**Vollständigkeit**.

σ-Algebren

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $A(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt σ-**Algebra**, wenn sie die Eigenschaften erfüllt.

1. $\Omega \in A(\Omega)$
2. $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
3. $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Eigenschaft 3 heißt auch σ-**Vollständigkeit**.

σ-Algebren

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $A(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt σ-**Algebra**, wenn sie die Eigenschaften erfüllt.

1. $\Omega \in A(\Omega)$
2. $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
3. $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Eigenschaft 3 heißt auch σ-**Vollständigkeit**.

σ-Algebren

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $A(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt σ-**Algebra**, wenn sie die Eigenschaften erfüllt.

1. $\Omega \in A(\Omega)$
2. $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
3. $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Eigenschaft 3 heißt auch σ-**Vollständigkeit**.

σ-Algebren

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $A(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt σ-**Algebra**, wenn sie die Eigenschaften erfüllt.

1. $\Omega \in A(\Omega)$
2. $A \in A(\Omega) \Rightarrow \Omega \setminus A \in A(\Omega)$
3. $A_i \in A(\Omega)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A(\Omega)$

Eigenschaft 3 heißt auch σ-**Vollständigkeit**.

σ-Algebren in Anwendungsfällen

- Die Grundgesamtheit ist endlich oder abzählbar unendlich: Die Potenzmenge der Grundgesamtheit ist die σ-Algebra der Ereignisse.
- Die Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra die die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ als Elemente enthält (σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}$)
- Die Grundgesamtheit ist der $\mathbb{R}^n$: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die die Mengen

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

für alle Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ enthält (sie heißt σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}^n$).

σ-Algebren in Anwendungsfällen

- Die Grundgesamtheit ist endlich oder abzählbar unendlich: Die Potenzmenge der Grundgesamtheit ist die σ-Algebra der Ereignisse.
- Die Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra die die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ als Elemente enthält (σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}$)
- Die Grundgesamtheit ist der $\mathbb{R}^n$: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die die Mengen

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

für alle Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ enthält (sie heißt σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}^n$).

σ-Algebren in Anwendungsfällen

- Die Grundgesamtheit ist endlich oder abzählbar unendlich: Die Potenzmenge der Grundgesamtheit ist die σ-Algebra der Ereignisse.
- Die Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra die die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ als Elemente enthält (σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}$)
- Die Grundgesamtheit ist der $\mathbb{R}^n$: σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, die die Mengen

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

  für alle Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ enthält (sie heißt σ-Algebra der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}^n$).

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit σ-Algebra $A(\Omega)$.

$P : A(\Omega) \to [0,1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

1. $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse A.
2. $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$),

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \sigma\text{-}\textbf{Additivität}$$

3. $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit σ-Algebra $A(\Omega)$.

$P : A(\Omega) \to [0, 1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

1. $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse A.
2. $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$),

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \sigma\text{-}\textbf{Additivität}$$

3. $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit σ-Algebra $A(\Omega)$.

$P : A(\Omega) \to [0,1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

1. $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse A.
2. $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$),

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \sigma\text{-}\textbf{Additivität}$$

3. $P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ mit σ-Algebra $A(\Omega)$.

$P : A(\Omega) \to [0,1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

1. $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse A.
2. $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ Ereignisse, paarweise disjunkt ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$),

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad \sigma\text{-}\mathbf{Additivität}$$

3. $P(\Omega) = 1$

Folgerungen:

1. $A \subset B : P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ und $P(A) \leq P(B)$
2. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
3. $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

Folgerungen:

1. $A \subset B : P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ und $P(A) \leq P(B)$
2. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
3. $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

Folgerungen:

1. $A \subset B : P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ und $P(A) \leq P(B)$
2. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
3. $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

Beispiel

Gegeben: Häufigkeitsverteilung von Klassen und Summenhäufigkeitsfunktion SF

$SF(\alpha) \approx$ Anteil der Messwerte $\leq \alpha$

$SF(\alpha)$ wird interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil.

Sollwert: 100
Toleranzbereich: $[99.5; 100.5]$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrektes Teil?

Beispiel

Gegeben: Häufigkeitsverteilung von Klassen und Summenhäufigkeitsfunktion SF

$SF(\alpha) \approx$ Anteil der Messwerte $\leq \alpha$

$SF(\alpha)$ wird interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil.

Sollwert: 100
Toleranzbereich: $[99.5; 100.5]$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrektes Teil?

Beispiel

Gegeben: Häufigkeitsverteilung von Klassen und Summenhäufigkeitsfunktion *SF*

$SF(\alpha) \approx$ Anteil der Messwerte $\leq \alpha$

$SF(\alpha)$ wird interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil.

Sollwert: 100
Toleranzbereich: $[99.5; 100.5]$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrektes Teil?

Beispiel

Gegeben: Häufigkeitsverteilung von Klassen und Summenhäufigkeitsfunktion SF

$SF(\alpha) \approx$ Anteil der Messwerte $\leq \alpha$

$SF(\alpha)$ wird interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil.

Sollwert: 100
Toleranzbereich: $[99.5; 100.5]$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrektes Teil?

Umgehensweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $A \subset \Omega$:

a) Ω endlich oder abzählbar unendlich: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse $P(\{\omega_i\})$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$
- $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$

b) Ω überabzählbar unendlich: $\Omega = \mathbb{R}$

- Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für jede Teilmenge $(-\infty, \alpha]$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- $A \subset \mathbb{R}$. Berechnung von $P(A)$ mit Hilfe der Rechenregeln aus den Wahrscheinlichkeiten für $(-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{R}$ (nicht für alle $A \subset \mathbb{R}$ möglich)

Umgehensweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $A \subset \Omega$:

a) Ω endlich oder abzählbar unendlich: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse $P(\{\omega_i\})$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$
- $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$

b) Ω überabzählbar unendlich: $\Omega = \mathbb{R}$

- Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für jede Teilmenge $(-\infty, \alpha]$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- $A \subset \mathbb{R}$. Berechnung von $P(A)$ mit Hilfe der Rechenregeln aus den Wahrscheinlichkeiten für $(-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{R}$ (nicht für alle $A \subset \mathbb{R}$ möglich)

Umgehensweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $A \subset \Omega$:

Bemerkung:

Es genügt nicht, die Wahrscheinlichkeiten $P(\{\alpha\})$ für alle reellen Zahlen α zu bestimmen. (Beispiel: $P(\{\alpha\}) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$)

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für $(-\infty, \alpha]$ kann wie im Beispiel 4 durch eine Funktion F erfolgen.

Möglich für jede monoton steigende und stetige Funktion F mit

$$\lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = 1, \quad P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$$

Umgehensweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $A \subset \Omega$:

Bemerkung:

Es genügt nicht, die Wahrscheinlichkeiten $P(\{\alpha\})$ für alle reellen Zahlen α zu bestimmen. (Beispiel: $P(\{\alpha\}) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$)

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für $(-\infty, \alpha]$ kann wie im Beispiel 4 durch eine Funktion F erfolgen.

Möglich für jede monoton steigende und stetige Funktion F mit

$$\lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) = 1, \quad P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen

- Die Grundgesamtheit ist endlich oder abzählbar unendlich: Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird angegeben für die Elementarereignisse, also für die Elemente der Grundgesamtheit. Für eine Teilmenge A erfolgt die Berechnung nach:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

- Die Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen: Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird angegeben durch eine stetige, monoton wachsende Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \qquad F(x) = P((-\infty, x])$$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen

- Die Grundgesamtheit ist endlich oder abzählbar unendlich: Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird angegeben für die Elementarereignisse, also für die Elemente der Grundgesamtheit. Für eine Teilmenge A erfolgt die Berechnung nach:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

- Die Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen: Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird angegeben durch eine stetige, monoton wachsende Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \qquad F(x) = P((-\infty, x])$$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen: Folgerungen

Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen:

1. $P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$
2. $P((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$
3. $P(\{\alpha\}) = 0$

A endlich oder abzählbar unendlich: $P(A) = 0$

z.B. Q Menge der rationalen Zahlen: $P(Q) = 0$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen: Folgerungen

Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen:

1. $P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$
2. $P((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$
3. $P(\{\alpha\}) = 0$

A endlich oder abzählbar unendlich: $P(A) = 0$

z.B. Q Menge der rationalen Zahlen: $P(Q) = 0$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen: Folgerungen

Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen:

1. $P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$
2. $P((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$
3. $P(\{\alpha\}) = 0$

A endlich oder abzählbar unendlich: $P(A) = 0$

z.B. Q Menge der rationalen Zahlen: $P(Q) = 0$

Wahrscheinlichkeitsmaße in Anwendungsfällen: Folgerungen

Grundgesamtheit ist die Menge der reellen Zahlen:

1. $P((-\infty, \alpha]) = F(\alpha)$
2. $P((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$
3. $P(\{\alpha\}) = 0$

A endlich oder abzählbar unendlich: $P(A) = 0$

z.B. Q Menge der rationalen Zahlen: $P(Q) = 0$