Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel I - Einführende Beispiele

Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Wahrscheinlichkeitstheorie

Agenda:

- Berechenbarkeit des Zufalls
- Hilfe für Entscheidungen bei Unsicherheit über die augenblickliche Situation bzw. weitere Entwicklung
- Analogie zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen
- Unterschiede zwischen diesen klarlegen
- Vorbereitung auf die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes

Wahrscheinlichkeitstheorie

Agenda:

- Berechenbarkeit des Zufalls
- Hilfe für Entscheidungen bei Unsicherheit über die augenblickliche Situation bzw. weitere Entwicklung
- Analogie zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen
- Unterschiede zwischen diesen klarlegen
- Vorbereitung auf die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes

Wahrscheinlichkeitstheorie

Agenda:

- Berechenbarkeit des Zufalls
- Hilfe für Entscheidungen bei Unsicherheit über die augenblickliche Situation bzw. weitere Entwicklung
- Analogie zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen
- Unterschiede zwischen diesen klarlegen
- Vorbereitung auf die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes

Wahrscheinlichkeitstheorie

Agenda:

- Berechenbarkeit des Zufalls
- Hilfe für Entscheidungen bei Unsicherheit über die augenblickliche Situation bzw. weitere Entwicklung
- Analogie zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen
- Unterschiede zwischen diesen klarlegen
- Vorbereitung auf die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes

Wahrscheinlichkeitstheorie

Agenda:

- Berechenbarkeit des Zufalls
- Hilfe für Entscheidungen bei Unsicherheit über die augenblickliche Situation bzw. weitere Entwicklung
- Analogie zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen
- Unterschiede zwischen diesen klarlegen
- Vorbereitung auf die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Umfang der Warenpartie: 10 000

Stichprobenumfang: $n = 150$

Stichprobenergebnis und Auswertung:

geprüft	150
gut	147
schlecht	3
Ausschussanteil der Stichprobe	2%

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Umfang der Warenpartie: 10 000

Stichprobenumfang: $n = 150$

Stichprobenergebnis und Auswertung:

geprüft	150
gut	147
schlecht	3
Ausschussanteil der Stichprobe	2%

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Schlussfolgerungen (Aufgabe der induktiven Statistik):

1. mindestens 3 schlechte Teile in der Warenpartie
2. mindestens 147 gute Teile in der Warenpartie

Aber: Es ist nicht zu vermuten, dass es nur 3 schlechte Teile (Extremfall 1) und nur 147 gute Teile (Extremfall 2) sind.

- *Wie wahrscheinlich ist eine Stichprobe mit 3 schlechten Teilen?*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Schlussfolgerungen (Aufgabe der induktiven Statistik):

1. mindestens 3 schlechte Teile in der Warenpartie
2. mindestens 147 gute Teile in der Warenpartie

Aber: Es ist nicht zu vermuten, dass es nur 3 schlechte Teile (Extremfall 1) und nur 147 gute Teile (Extremfall 2) sind.

- *Wie wahrscheinlich ist eine Stichprobe mit 3 schlechten Teilen?*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Schlussfolgerungen (Aufgabe der induktiven Statistik):

1. mindestens 3 schlechte Teile in der Warenpartie
2. mindestens 147 gute Teile in der Warenpartie

Aber: Es ist nicht zu vermuten, dass es nur 3 schlechte Teile (Extremfall 1) und nur 147 gute Teile (Extremfall 2) sind.

- *Wie wahrscheinlich ist eine Stichprobe mit 3 schlechten Teilen?*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Schlussfolgerungen (Aufgabe der induktiven Statistik):

1. mindestens 3 schlechte Teile in der Warenpartie
2. mindestens 147 gute Teile in der Warenpartie

Aber: Es ist nicht zu vermuten, dass es nur 3 schlechte Teile (Extremfall 1) und nur 147 gute Teile (Extremfall 2) sind.

⊛ *Wie wahrscheinlich ist eine Stichprobe mit 3 schlechten Teilen?*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Stichprobe:

Zufällige Auswahl von n Stück ($n = 150$), d.h. jede mögliche Auswahl für dieses n hat dieselbe Chance.

Anzahl der Möglichkeiten, 150 aus 10 000 auszuwählen:

$$\binom{10000}{150} = \frac{10000 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot 9851}{150 \cdot 149 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{10000!}{150!(10000-150)!}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Stichprobe:

Zufällige Auswahl von n Stück ($n = 150$), d.h. jede mögliche Auswahl für dieses n hat dieselbe Chance.

Anzahl der Möglichkeiten, 150 aus 10 000 auszuwählen:

$$\binom{10000}{150} = \frac{10000 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot 9851}{150 \cdot 149 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{10000!}{150!(10000-150)!}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist auf alle Stichproben vom Umfang n gleichmäßig zu verteilen.

Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ (wg. relativer Gesamthäufigkeit 1)

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit einer speziellen Stichprobe ($n = 150$):

$$\frac{1}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist auf alle Stichproben vom Umfang n gleichmäßig zu verteilen.

Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ (wg. relativer Gesamthäufigkeit 1)

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit einer speziellen Stichprobe ($n = 150$):

$$\frac{1}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

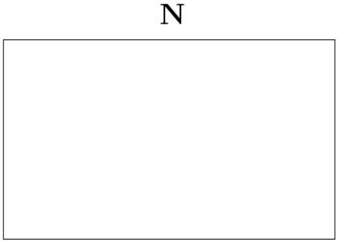
Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist auf alle Stichproben vom Umfang n gleichmäßig zu verteilen.

Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ (wg. relativer Gesamthäufigkeit 1)

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit einer speziellen Stichprobe ($n = 150$):

$$\frac{1}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe



Hieraus werden für die spezielle Stichprobe beliebig $n = 150$ Stück gezogen.

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter den Stichproben gerade eine mit 3 schlechten Teilen zu erhalten?

Diese Wahrscheinlichkeit hängt vom Ausschussanteil der Warenpartie ab.

p: Ausschussanteil der Warenpartie,

$M = p \cdot 10000$: Anzahl schlechter Teile in der Warenpartie

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter den Stichproben gerade eine mit 3 schlechten Teilen zu erhalten?

Diese Wahrscheinlichkeit hängt vom Ausschussanteil der Warenpartie ab.

p: Ausschussanteil der Warenpartie,

$M = p \cdot 10000$: Anzahl schlechter Teile in der Warenpartie

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

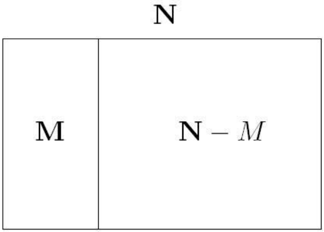
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter den Stichproben gerade eine mit 3 schlechten Teilen zu erhalten?

Diese Wahrscheinlichkeit hängt vom Ausschussanteil der Warenpartie ab.

p: Ausschussanteil der Warenpartie,

$M = p \cdot 10000$: Anzahl schlechter Teile in der Warenpartie

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe



Alle speziellen Stichproben ($n = 150$) mit 3 schlechten und 147 guten.

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wie viele verschiedene Stichproben mit 3 schlechten Teilen gibt es?

$\binom{M}{3}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die 3 schlechten auszuwählen, für $M < 3$: $\binom{M}{3} = 0$*
$\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die 147 guten auszuwählen*
$\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl verschiedener Stichproben mit genau 3 schlechten Teilen*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wie viele verschiedene Stichproben mit 3 schlechten Teilen gibt es?

$\binom{M}{3}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die 3 schlechten auszuwählen, für $M < 3$: $\binom{M}{3} = 0$*
$\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die 147 guten auszuwählen*
$\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl verschiedener Stichproben mit genau 3 schlechten Teilen*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wie viele verschiedene Stichproben mit 3 schlechten Teilen gibt es?

$\binom{M}{3}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die* 3 *schlechten auszuwählen, für* $M < 3$: $\binom{M}{3} = 0$
$\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl der Möglichkeiten, die* 147 *guten auszuwählen*
$\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}$	*Anzahl verschiedener Stichproben mit genau* 3 *schlechten Teilen*

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wahrscheinlichkeit für genau 3 schlechte Teile in der Stichprobe:

Anzahl der Stichproben · Wahrscheinlichkeit einer Stichprobe

$$= \binom{M}{3}\binom{10000-M}{147} \cdot \frac{1}{\binom{10000}{150}} = \frac{\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wahrscheinlichkeit für genau 3 schlechte Teile in der Stichprobe:

Anzahl der Stichproben · Wahrscheinlichkeit einer Stichprobe

$$= \binom{M}{3}\binom{10000-M}{147} \cdot \frac{1}{\binom{10000}{150}} = \frac{\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wahrscheinlichkeit für genau 3 schlechte Teile in der Stichprobe:

Anzahl der Stichproben · Wahrscheinlichkeit einer Stichprobe

$$= \binom{M}{3}\binom{10000-M}{147} \cdot \frac{1}{\binom{10000}{150}} = \frac{\binom{M}{3}\binom{10000-M}{147}}{\binom{10000}{150}}$$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wahrscheinlichkeit für genau 3 schlechte Teile in der Stichprobe:

M	p	Wahrscheinlichkeit
0	0	0
5	0.0005	0.00003
10	0.001	0.00036
25	0.0025	0.00549
50	0.005	0.03227
100	0.01	0.12630
200	0.02	0.22800
500	0.05	0.03595
1000	0.1	0.00010

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Wahrscheinlichkeit für genau 3 schlechte Teile in der Stichprobe:

M	p	Wahrscheinlichkeit
0	0	0
5	0.0005	0.00003
10	0.001	0.00036
25	0.0025	0.00549
50	0.005	0.03227
100	0.01	0.12630
200	0.02	0.22800
500	0.05	0.03595
1000	0.1	0.00010

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells:

- Menge der verschiedenen Stichproben:
  Grundgesamtheit Ω

- Jede Einzelstichprobe hat dieselbe Wahrscheinlichkeit
  $\omega \in \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für* ω: $\frac{1}{\#\Omega}$
  (ω - "Elementarereignis")

- Eine Teilmenge von Stichproben hat als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elemente der Teilmenge
  $A \subset \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für* A: $\#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells:

- Menge der verschiedenen Stichproben:
  Grundgesamtheit Ω
- Jede Einzelstichprobe hat dieselbe Wahrscheinlichkeit
  $\omega \in \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für* ω*:* $\frac{1}{\#\Omega}$
  (ω - "Elementarereignis")
- Eine Teilmenge von Stichproben hat als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elemente der Teilmenge
  $A \subset \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für A:* $\#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells:

- Menge der verschiedenen Stichproben:
  Grundgesamtheit Ω
- Jede Einzelstichprobe hat dieselbe Wahrscheinlichkeit
  $\omega \in \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für* ω: $\frac{1}{\#\Omega}$
  (ω - "Elementarereignis")
- Eine Teilmenge von Stichproben hat als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elemente der Teilmenge
  $A \subset \Omega$, *Wahrscheinlichkeit für* A: $\#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Zusammenfassung:

- Grundgesamtheit Ω
- Zuordnung, die jeder Teilmenge eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

  $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]\,, \qquad \mathcal{P}(\Omega) \quad \textit{Potenzmenge von } \Omega$

Hier: alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich: $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
(Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum)

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Zusammenfassung:

- Grundgesamtheit Ω
- Zuordnung, die jeder Teilmenge eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

  $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]\,, \qquad \mathcal{P}(\Omega) \quad \textit{Potenzmenge von } \Omega$

Hier: alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich: $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
(Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum)

Beispiel 1: Kontrolle einer Warenpartie mit einer Stichprobe

Zusammenfassung:

- Grundgesamtheit Ω
- Zuordnung, die jeder Teilmenge eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

  $$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] , \qquad \mathcal{P}(\Omega) \quad \textit{Potenzmenge von } \Omega$$

Hier: alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich: $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ (Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum)

Beispiel 2: Telefonverbindung

Angenommen:

In einem Drittel aller Wählversuche erhalten wir eine Verbindung.

Häufigkeitstabelle für die Anzahl der Wählversuche bis zum Erfolg (hypothetisch):

Anzahl	relative Häufigkeit
1	$1/3$
2	$1/3(2/3)$
3	$1/3(2/3)^2$
4	$1/3(2/3)^3$
5	$1/3(2/3)^4$
6	$1/3(2/3)^5$
k	$1/3(2/3)^{k-1}$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Angenommen:

In einem Drittel aller Wählversuche erhalten wir eine Verbindung.

Häufigkeitstabelle für die Anzahl der Wählversuche bis zum Erfolg (hypothetisch):

Anzahl	relative Häufigkeit
1	$1/3$
2	$1/3(2/3)$
3	$1/3(2/3)^2$
4	$1/3(2/3)^3$
5	$1/3(2/3)^4$
6	$1/3(2/3)^5$
k	$1/3(2/3)^{k-1}$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Relevantes Ereignis: Anzahl der Wählversuche bis zum Erfolg:

$$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty$$

Relative Häufigkeit von ∞:

$$1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{2}{3})} = 1 - 1 = 0$$

Interpretation der relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2: Telefonverbindung

Relevantes Ereignis: Anzahl der Wählversuche bis zum Erfolg:

$$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty$$

Relative Häufigkeit von ∞:

$$1 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})} = 1 - 1 = 0$$

Interpretation der relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2: Telefonverbindung

Relevantes Ereignis: Anzahl der Wählversuche bis zum Erfolg:

$$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty$$

Relative Häufigkeit von ∞:

$$1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{2}{3})} = 1 - 1 = 0$$

Interpretation der relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- Wahrscheinlichkeit für das Elementarereignis k:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\
p_\infty &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- Wahrscheinlichkeit für das Elementarereignis k:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\
p_\infty &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell:

- Grundgesamtheit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, \infty\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- Wahrscheinlichkeit für das Elementarereignis k:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ p_\infty &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell: (Fortsetzung)

- $A \subset \Omega$ (z.B. Erfolg nach höchstens 3 Versuchen: $A=\{1,2,3\}$)

$$P(A) = \sum_{a \in A} p_a$$

$$(\text{z.B.} \quad P(\{1,2,3\}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{19}{27}\ )$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell: (Fortsetzung)

- $A \subset \Omega$ (z.B. Erfolg nach höchstens 3 Versuchen: $A=\{1,2,3\}$)

$$P(A) = \sum_{a \in A} p_a$$

$$\text{(z.B.} \quad P(\{1,2,3\}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{19}{27}\text{)}$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Wahrscheinlichkeitsmodell: (Fortsetzung)

- $A \subset \Omega$ (z.B. Erfolg nach höchstens 3 Versuchen: A=$\{1,2,3\}$)

$$P(A) = \sum_{a \in A} p_a$$

$$\text{(z.B.} \quad P(\{1,2,3\}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{19}{27} \text{)}$$

Beispiel 2: Telefonverbindung

Unterschied zu Beispiel 1:

- Grundgesamtheit ist abzählbar unendlich
- Elementarereignisse sind nicht gleichwahrscheinlich

Beispiel 2: Telefonverbindung

Unterschied zu Beispiel 1:

- Grundgesamtheit ist abzählbar unendlich
- Elementarereignisse sind nicht gleichwahrscheinlich

Beispiel 2: Telefonverbindung

Unterschied zu Beispiel 1:

- Grundgesamtheit ist abzählbar unendlich
- Elementarereignisse sind nicht gleichwahrscheinlich

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Gegeben:

Merkmal auf einer statistischen Masse S.

Menge der Merkmalsausprägungen (endlich oder abzählbar unendlich):

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Gegeben:

Merkmal auf einer statistischen Masse S.

Menge der Merkmalsausprägungen (endlich oder abzählbar unendlich):

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

$p(a_k)$ ($h(a_k)$): relative (absolute) Häufigkeit der Merkmalausprägung a_k

$$p(a_k) = \frac{1}{N} h(a_k)$$

wird als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von a_k interpretiert.

$A \subset M$: Die relative Häufigkeit für das Auftreten einer der Merkmalsausprägungen in A

$$\sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

wird Wahrscheinlichkeit für die Teilmenge A genannt.

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

$p(a_k)$ ($h(a_k)$): relative (absolute) Häufigkeit der Merkmalausprägung a_k

$$p(a_k) = \frac{1}{N} h(a_k)$$

wird als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von a_k interpretiert.

$A \subset M$: Die relative Häufigkeit für das Auftreten einer der Merkmalsausprägungen in A

$$\sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

wird Wahrscheinlichkeit für die Teilmenge A genannt.

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: “Zusammengesetztes Ereignis”

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Wahrscheinlichkeitsmodell:

a: Elementarereignis

A: "Zusammengesetztes Ereignis"

- Grundgesamtheit: $\Omega = M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- Wahrscheinlichkeit für a_k: relative Häufigkeit $p(a_k)$
- $A \subset \Omega$: Wahrscheinlichkeit für A

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Alternativer Weg:

Zufällige Entnahme einer statistischen Einheit s aus S mit N Einheiten.

Zufällig: jedes $s \in S$ hat dieselbe Chance

$$\frac{1}{\#S} = \frac{1}{N}$$

Wahrscheinlichkeit für Merkmalsausprägung a_k:

Sei zusammengesetztes Ereignis $A_k = \{s \in S \| s \text{ trägt } a_k\}$:

$$P(A_k) = \#A_k \frac{1}{\#S} = \frac{h(a_k)}{N} = p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Alternativer Weg:

Zufällige Entnahme <u>einer</u> statistischen Einheit s aus S mit N Einheiten.

Zufällig: jedes $s \in S$ hat dieselbe Chance

$$\frac{1}{\#S} = \frac{1}{N}$$

Wahrscheinlichkeit für Merkmalsausprägung a_k:

Sei zusammengesetztes Ereignis $A_k = \{s \in S \| s \text{ trägt } a_k\}$:

$$P(A_k) = \#A_k \frac{1}{\#S} = \frac{h(a_k)}{N} = p(a_k)$$

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Modell:

- $\Omega = S$
- Elementarereignisse gleichwahrscheinlich
- Damit:

$$P(A) = \#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$$

Fazit:
Unterschiedliches Modell, aber dieselbe Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Merkmalsausprägungen.

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Modell:

- $\Omega = S$
- Elementarereignisse gleichwahrscheinlich
- Damit:

$$P(A) = \#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$$

Fazit:
Unterschiedliches Modell, aber dieselbe Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Merkmalsausprägungen.

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Modell:

- $\Omega = S$
- Elementarereignisse gleichwahrscheinlich
- Damit:

$$P(A) = \#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$$

Fazit:
Unterschiedliches Modell, aber dieselbe Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Merkmalsausprägungen.

Beispiel 3: Häufigkeitsverteilung allgemein

Modell:

- $\Omega = S$
- Elementarereignisse gleichwahrscheinlich
- Damit:

$$P(A) = \#A \cdot \frac{1}{\#\Omega}$$

Fazit:
Unterschiedliches Modell, aber dieselbe Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Merkmalsausprägungen.

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells eines Zufallsprozesses in Beispiel 1-3

- Grundgesamtheit Ω besteht aus Elementarereignissen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (endlich oder abzählbar unendlich)
- Für jedes ω_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten: P_i
- Ein zusammengesetztes Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω : $A \subset \Omega$
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i$$

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells eines Zufallsprozesses in Beispiel 1-3

- Grundgesamtheit Ω besteht aus Elementarereignissen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (endlich oder abzählbar unendlich)
- Für jedes ω_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten: P_i
- Ein zusammengesetztes Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω : $A \subset \Omega$
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i$$

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells eines Zufallsprozesses in Beispiel 1-3

- Grundgesamtheit Ω besteht aus Elementarereignissen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (endlich oder abzählbar unendlich)
- Für jedes ω_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten: P_i
- Ein zusammengesetztes Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω : $A \subset \Omega$
- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i$$

Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmodells eines Zufallsprozesses in Beispiel 1-3

- Grundgesamtheit Ω besteht aus Elementarereignissen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (endlich oder abzählbar unendlich)

- Für jedes ω_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten: P_i

- Ein zusammengesetztes Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω : $A \subset \Omega$

- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i$$

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Analyse der Präzision einer Maschine: (z.B. Drehbank)

1000 "identische" Teile werden hergestellt und gemessen.

Ergebnis: Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$

Ansatz: *Jedes weitere produzierte Teil "entspricht" dem bisherigen Ergebnis (aus Messwert des neu produzierten Teils $\rightarrow$ Messwert eines zufällig aus den 1000 genommenen Teils).*

Aber: *Bei genauer Messung wird keiner der gemessenen Werte bei weiteren produzierten Teilen erneut vorliegen.*

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Analyse der Präzision einer Maschine: (z.B. Drehbank)

1000 "identische" Teile werden hergestellt und gemessen.

Ergebnis: Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$

Ansatz: *Jedes weitere produzierte Teil "entspricht" dem bisherigen Ergebnis (aus Messwert des neu produzierten Teils $\to$ Messwert eines zufällig aus den 1000 genommenen Teils).*

Aber: *Bei genauer Messung wird keiner der gemessenen Werte bei weiteren produzierten Teilen erneut vorliegen.*

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Analyse der Präzision einer Maschine: (z.B. Drehbank)

1000 “identische” Teile werden hergestellt und gemessen.

Ergebnis: Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$

Ansatz: *Jedes weitere produzierte Teil "entspricht" dem bisherigen Ergebnis (aus Messwert des neu produzierten Teils $\rightarrow$ Messwert eines zufällig aus den 1000 genommenen Teils).*

Aber: *Bei genauer Messung wird keiner der gemessenen Werte bei weiteren produzierten Teilen erneut vorliegen.*

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Daher: "Glättung" der Messwerte: Klassierung der Daten und Verwendung der Summenhäufigkeitsfunktion zur Bestimmung von Häufigkeiten und Übertragung auf Wahrscheinlichkeiten für noch zu produzierende Teile.

Häufigkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ in der Urliste in der Näherung durch die Summenhäufigkeitsfunktion:

$$SF(\alpha)$$

Damit: Wahrscheinlichkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil:

$$P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$$

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Daher: “Glättung” der Messwerte: Klassierung der Daten und Verwendung der Summenhäufigkeitsfunktion zur Bestimmung von Häufigkeiten und Übertragung auf Wahrscheinlichkeiten für noch zu produzierende Teile.

Häufigkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ in der Urliste in der Näherung durch die Summenhäufigkeitsfunktion:

$$SF(\alpha)$$

Damit: Wahrscheinlichkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil:

$$P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$$

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Daher: “Glättung” der Messwerte: Klassierung der Daten und Verwendung der Summenhäufigkeitsfunktion zur Bestimmung von Häufigkeiten und Übertragung auf Wahrscheinlichkeiten für noch zu produzierende Teile.

Häufigkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ in der Urliste in der Näherung durch die Summenhäufigkeitsfunktion:

$$SF(\alpha)$$

Damit: Wahrscheinlichkeit eines Messwerts $\leq \alpha$ bei einem neu produzierten Teil:

$$P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$$

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Häufigkeitstabelle der Durchmesser

Durchmesser über	Durchmesser bis einschließlich	absolute Häufigkeit	Durchmesser über	Durchmesser bis einschließlich	absolute Häufigkeit	Durchmesser über	Durchmesser bis einschließlich	absolute Häufigkeit
99.10	99.15	1	99.70	99.75	41	100.30	100.35	23
99.15	99.20	0	99.75	99.80	55	100.35	100.40	15
99.20	99.25	0	99.80	99.85	68	100.40	100.45	9
99.25	99.30	1	99.85	99.90	80	100.45	100.50	8
99.30	99.35	0	99.90	99.95	94	100.50	100.55	4
99.35	99.40	1	99.95	100.00	97	100.55	100.60	1
99.40	99.45	2	100.00	100.05	101	100.60	100.65	0
99.45	99.50	4	100.05	100.10	94	100.65	100.70	0
99.50	99.55	5	100.10	100.15	82	100.70	100.75	0
99.55	99.60	10	100.15	100.20	66	100.75	100.80	1
99.60	99.65	17	100.20	100.25	54	100.80	100.85	0
99.65	99.70	25	100.25	100.30	41	100.85	100.90	0

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

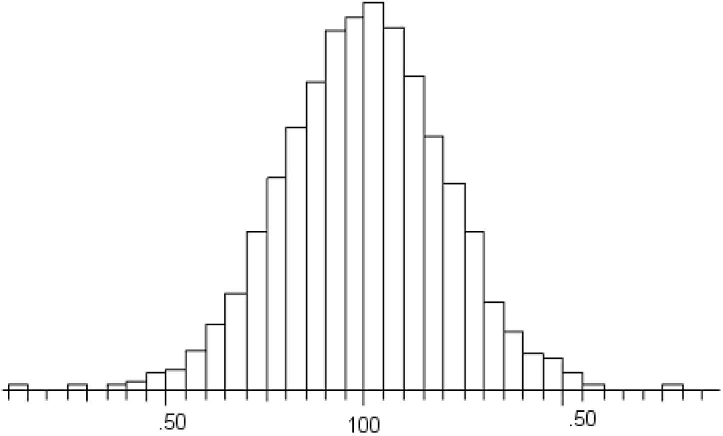


Abbildung: Histogramm zur Häufigkeitstabelle der Durchmesser

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

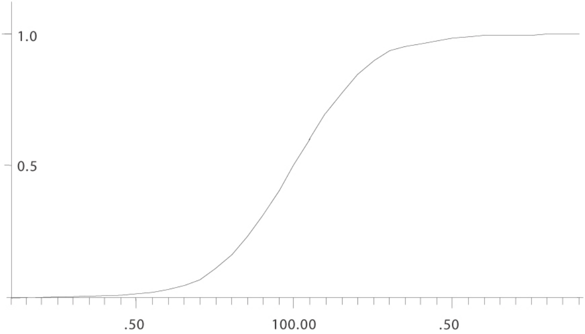


Abbildung: Summenhäufigkeitsfunktion zur Häufigkeitstabelle der Durchmesser

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Häufigkeitstabelle der Durchmesser

OK:	$99.5 \leq$ Messwert ≤ 100.5
Ausschuss:	Messwert < 99.5 oder Messwert > 100.5

- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teil zu produzieren, das OK ist?*
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss?*
  $\Rightarrow$ Relative Häufigkeit, Summenhäufigkeitsfunktion

$SF(\alpha)$: relative Häufigkeit für einen Messwert $\leq \alpha$, interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert im Bereich $(-\infty, \alpha]$.

Wahrscheinlichkeit für **OK**: $SF(100.5) - SF(99.5)$
$+$ Wahrscheinlichkeit für $\{99.5\}$.

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Häufigkeitstabelle der Durchmesser

OK:	$99.5 \leq \text{Messwert} \leq 100.5$
Ausschuss:	$\text{Messwert} < 99.5$ oder $\text{Messwert} > 100.5$

- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teil zu produzieren, das OK ist?*
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss?*
  $\Rightarrow$ Relative Häufigkeit, Summenhäufigkeitsfunktion

$SF(\alpha)$: relative Häufigkeit für einen Messwert $\leq \alpha$, interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert im Bereich $(-\infty, \alpha]$.

Wahrscheinlichkeit für **OK**: $SF(100.5) - SF(99.5)$
$+$ Wahrscheinlichkeit für $\{99.5\}$.

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Häufigkeitstabelle der Durchmesser

OK:	$99.5 \leq$ Messwert ≤ 100.5
Ausschuss:	Messwert < 99.5 oder Messwert > 100.5

- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teil zu produzieren, das OK ist?*
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss?*
  $\Rightarrow$ *Relative Häufigkeit, Summenhäufigkeitsfunktion*

$SF(\alpha)$: relative Häufigkeit für einen Messwert $\leq \alpha$, interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert im Bereich $(-\infty, \alpha]$.

Wahrscheinlichkeit für **OK**: $SF(100.5) - SF(99.5)$
$+$ Wahrscheinlichkeit für $\{99.5\}$.

Beispiel 4: Häufigkeitsverteilung eines stetigen Merkmals

Häufigkeitstabelle der Durchmesser

OK:	$99.5 \leq$ Messwert ≤ 100.5
Ausschuss:	Messwert < 99.5 oder Messwert > 100.5

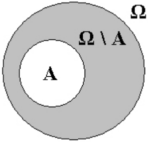
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teil zu produzieren, das OK ist?*
- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss?*
  $\Rightarrow$ *Relative Häufigkeit, Summenhäufigkeitsfunktion*

$SF(\alpha)$: relative Häufigkeit für einen Messwert $\leq \alpha$, interpretiert als Wahrscheinlichkeit für einen Messwert im Bereich $(-\infty, \alpha]$.

Wahrscheinlichkeit für **OK**: $SF(100.5) - SF(99.5)$
$+$ Wahrscheinlichkeit für $\{99.5\}$.

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 1

1.) Relative Häufigkeit des Komplements eines Teilbereichs
$=$ 1 - relative Häufigkeit des Teilbereichs:



$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 1

Im Beispiel 4:

Da $(\alpha, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, \alpha]$, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $> \alpha$:

$$P((\alpha, \infty)) = 1 - P((-\infty, \alpha]) = 1 - SF(\alpha)$$

Wahrscheinlichkeit für Messwert > 100.5:

$$1 - SF(100.5) = 1 - \frac{994}{1000} = \frac{6}{1000}$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 1

Im Beispiel 4:

Da $(\alpha, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, \alpha]$, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Messwert $> \alpha$:

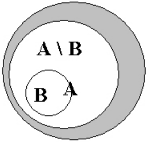
$$P((\alpha, \infty)) = 1 - P((-\infty, \alpha]) = 1 - SF(\alpha)$$

Wahrscheinlichkeit für Messwert > 100.5:

$$1 - SF(100.5) = 1 - \frac{994}{1000} = \frac{6}{1000}$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 2

2.) Reduziert man einen Teilbereich A um eine Teilmenge B, so reduziert sich die relative Häufigkeit von A um die relative Häufigkeit von B:



$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 2

Im Beispiel 4:

Mit $(\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] \setminus (-\infty, \alpha]$ gilt

$$P((\alpha, \beta]) = P((-\infty, \beta]) - P((-\infty, \alpha]) = SF(\beta) - SF(\alpha)$$

$\alpha = 99.5, \ \beta = 100.5$:

$$P((99.5; 100.5]) = SF(100.5) - SF(99.5) = \frac{994}{1000} - \frac{9}{1000} = \frac{985}{1000}$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 2

Im Beispiel 4:

Mit $(\alpha, \beta] = (-\infty, \beta] \setminus (-\infty, \alpha]$ gilt

$$P((\alpha, \beta]) = P((-\infty, \beta]) - P((-\infty, \alpha]) = SF(\beta) - SF(\alpha)$$

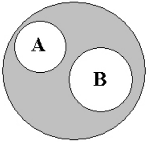
$\alpha = 99.5,\ \beta = 100.5$:

$$P((99.5; 100.5]) = SF(100.5) - SF(99.5) = \frac{994}{1000} - \frac{9}{1000} = \frac{985}{1000}$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 3

3.) Fügt man zwei disjunkte Teilbereiche zusammen, so ist die relative Häufigkeit der Vereinigung die Summe der relativen Häufigkeiten der Teilbereiche:

Für B, A **mit** $B \cap A = \emptyset$**:**



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 3

Folgerung:

Mit $[\alpha, \beta] = \{\alpha\} \cup (\alpha, \beta]$ gilt

$$P([\alpha, \beta]) = P(\{\alpha\}) + P((\alpha, \beta])$$

Frage: *Wie groß ist $P(\{\alpha\})$?*

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 3

Folgerung:

Mit $[\alpha, \beta] = \{\alpha\} \cup (\alpha, \beta]$ gilt

$$P([\alpha, \beta]) = P(\{\alpha\}) + P((\alpha, \beta])$$

Frage: *Wie groß ist* $P(\{\alpha\})$ *?*

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

4.) Abzählbar unendllich viele Mengen:

Für Teilmengen $A_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots,$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ gilt

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Beispiel:

$$(0,1) = (0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{4}] \cup \dots$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Beispiel (Fortsetzung):

$$
\begin{aligned}
P((0,1)) &= P((0,\tfrac{1}{2}]) + P((\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3}]) + P((\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{4}]) + \dots \\
&= SF(\tfrac{1}{2}) - SF(0) + SF(\tfrac{2}{3}) - SF(\tfrac{1}{2}) + SF(\tfrac{3}{4}) - SF(\tfrac{2}{3}) + \dots \\
&= \lim_{k\to\infty} SF(\tfrac{k}{k+1}) - SF(0) = SF(1) - SF(0) \\
&= P((0,1]) = P((0,1)) + P(\{1\}) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{P(\{1\}) = 0}
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Beispiel (Fortsetzung):

$$
\begin{aligned}
P((0,1)) &= P((0,\frac{1}{2}]) + P((\frac{1}{2},\frac{2}{3}]) + P((\frac{2}{3},\frac{3}{4}]) + \ldots \\
&= SF(\frac{1}{2}) - SF(0) + SF(\frac{2}{3}) - SF(\frac{1}{2}) + SF(\frac{3}{4}) - SF(\frac{2}{3}) + \ldots \\
&= \lim_{k\to\infty} SF(\frac{k}{k+1}) - SF(0) = SF(1) - SF(0) \\
&= P((0,1]) = P((0,1)) + P(\{1\}) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{P(\{1\}) = 0}
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Beispiel (Fortsetzung):

$$
\begin{aligned}
P((0,1)) &= P((0,\frac{1}{2}]) + P((\frac{1}{2},\frac{2}{3}]) + P((\frac{2}{3},\frac{3}{4}]) + \dots \\
&= SF(\frac{1}{2}) - SF(0) + SF(\frac{2}{3}) - SF(\frac{1}{2}) + SF(\frac{3}{4}) - SF(\frac{2}{3}) + \dots \\
&= \lim_{k\to\infty} SF(\frac{k}{k+1}) - SF(0) = SF(1) - SF(0) \\
&= P((0,1]) = P((0,1)) + P(\{1\}) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{P(\{1\}) = 0}
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Beispiel (Fortsetzung):

$$\begin{aligned}
P((0,1)) &= P((0,\frac{1}{2}]) + P((\frac{1}{2},\frac{2}{3}]) + P((\frac{2}{3},\frac{3}{4}]) + \dots \\
&= SF(\frac{1}{2}) - SF(0) + SF(\frac{2}{3}) - SF(\frac{1}{2}) + SF(\frac{3}{4}) - SF(\frac{2}{3}) + \dots \\
&= \lim_{k\to\infty} SF(\frac{k}{k+1}) - SF(0) = SF(1) - SF(0) \\
&= P((0,1]) = P((0,1)) + P(\{1\}) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{P(\{1\}) = 0}
\end{aligned}$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Die Wahrscheinlichkeit einen ganz bestimmten, vorher festgelegten Messwert bei einem neu produzierten Teil zu erhalten ist 0:

$$P(\{\alpha\}) = 0 \qquad \circledast$$

für jede reelle Zahl α.

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Folgerung aus $\circledast$:

<u>A endlich:</u>

$$A = \underbrace{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}_{\alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

<u>A abzählbar unendlich:</u>

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Folgerung aus $\circledast$:

A endlich:

$$A = \underbrace{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}_{\alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

A abzählbar unendlich:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Folgerung aus $\circledast$:

A endlich:

$$A = \underbrace{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}_{\alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

A abzählbar unendlich:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\} \quad \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\alpha_i\}) = 0$$

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

In Beispiel 4 gilt:

1. Es genügt nicht, Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse anzugeben.
2. Nicht für jede Teilmenge der reellen Zahlen kann eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

In Beispiel 4 gilt:

1. Es genügt nicht, Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse anzugeben.
2. Nicht für jede Teilmenge der reellen Zahlen kann eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Für welche Teilmengen kann eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden?

- Teilmengen $(-\infty, \alpha]$ mit $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

($\Rightarrow$ Anwendung der Rechenregeln 1.-4.)

Eigenschaften von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten 4

Für welche Teilmengen kann eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden?

- Teilmengen $(-\infty, \alpha]$ mit $P((-\infty, \alpha]) = SF(\alpha)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

($\Rightarrow$ *Anwendung der Rechenregeln 1.-4.)*

Wahrscheinlichkeitsmodell zu Beispiel 4

Grundgesamtheit: Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Für **manche** Teilmengen der reellen Zahlen wird mit Hilfe der Summenhäufigkeitsfunktion eine Wahrscheinlichkeit berechnet.

Einzelne reelle Zahlen haben die Wahrscheinlichkeit 0.
Damit ist wegen den Eigenschaften 3 und 4 von Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmenge reeller Zahlen ebenfalls 0.

Wahrscheinlichkeitsmodell zu Beispiel 4

Grundgesamtheit: Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Für **manche** Teilmengen der reellen Zahlen wird mit Hilfe der Summenhäufigkeitsfunktion eine Wahrscheinlichkeit berechnet.

Einzelne reelle Zahlen haben die Wahrscheinlichkeit 0.
Damit ist wegen den Eigenschaften 3 und 4 von Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmenge reeller Zahlen ebenfalls 0.

Wahrscheinlichkeitsmodell zu Beispiel 4

Grundgesamtheit: Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Für **manche** Teilmengen der reellen Zahlen wird mit Hilfe der Summenhäufigkeitsfunktion eine Wahrscheinlichkeit berechnet.

Einzelne reelle Zahlen haben die Wahrscheinlichkeit 0.
Damit ist wegen den Eigenschaften 3 und 4 von Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmenge reeller Zahlen ebenfalls 0.

Eigenschaften des Systems von Teilmengen, für das Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann

1.) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\emptyset$ gehören dazu: $P(\mathbb{R}) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$

2.) Zu jeder Teilmenge A gehört das Komplement dazu:
$P(\mathbb{R} \setminus A) = 1 - P(A)$

3.) Zu jeder abzählbaren Folge von paarweisen disjunkten Teilmengen $A_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots$ gehört die Vereinigung dieser Teilmengen dazu:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ausgangspunkt sind die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften des Systems von Teilmengen, für das Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann

1.) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\emptyset$ gehören dazu: $\quad P(\mathbb{R}) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$

2.) Zu jeder Teilmenge A gehört das Komplement dazu:
$P(\mathbb{R} \setminus A) = 1 - P(A)$

3.) Zu jeder abzählbaren Folge von paarweisen disjunkten Teilmengen $A_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots$ gehört die Vereinigung dieser Teilmengen dazu:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ausgangspunkt sind die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften des Systems von Teilmengen, für das Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann

1.) $\Omega = \mathbb{R}$ und $\emptyset$ gehören dazu: $\quad P(\mathbb{R}) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$

2.) Zu jeder Teilmenge A gehört das Komplement dazu:
$P(\mathbb{R} \setminus A) = 1 - P(A)$

3.) Zu jeder abzählbaren Folge von paarweisen disjunkten Teilmengen $A_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots$ gehört die Vereinigung dieser Teilmengen dazu:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ausgangspunkt sind die Halbgeraden $(-\infty, \alpha]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Gemeinsamkeiten:

- eine nichtleere Menge als **Grundgesamtheit**
- ein **Mengensystem von Teilmengen der Grundgesamtheit**, mit denen die zufälligen Ereignisse erfasst werden
- eine Abbildung P, die jedem Ereignis, also jeder Teilmenge des Mengensystems, eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
  P wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Gemeinsamkeiten:

- eine nichtleere Menge als **Grundgesamtheit**
- ein **Mengensystem von Teilmengen der Grundgesamtheit**, mit denen die zufälligen Ereignisse erfasst werden
- eine Abbildung P, die jedem Ereignis, also jeder Teilmenge des Mengensystems, eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
  P wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Gemeinsamkeiten:

- eine nichtleere Menge als **Grundgesamtheit**
- ein **Mengensystem von Teilmengen der Grundgesamtheit**, mit denen die zufälligen Ereignisse erfasst werden
- eine Abbildung P, die jedem Ereignis, also jeder Teilmenge des Mengensystems, eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
  P wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Gemeinsamkeiten:

- eine nichtleere Menge als **Grundgesamtheit**
- ein **Mengensystem von Teilmengen der Grundgesamtheit**, mit denen die zufälligen Ereignisse erfasst werden
- eine Abbildung P, die jedem Ereignis, also jeder Teilmenge des Mengensystems, eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
  P wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Unterschiede:

- Bei den **Beispielen 1-3** ist die Grundgesamtheit endlich oder abzählbar unendlich. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse diese Ereignisses berechnet werden:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

- Bei **Beispiel 4** ist die **Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis 0**. Ebenso für jede endliche und jede abzählbar unendliche Teilmenge.

  Nur für eine überabzählbare unendliche Teilmenge kann Wahrscheinlichkeit positiv sein.

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Unterschiede:

- Bei den **Beispielen 1-3** ist die Grundgesamtheit endlich oder abzählbar unendlich. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse diese Ereignisses berechnet werden:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

- Bei **Beispiel 4** ist die **Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis 0**. Ebenso für jede endliche und jede abzählbar unendliche Teilmenge.

  Nur für eine überabzählbare unendliche Teilmenge kann Wahrscheinlichkeit positiv sein.

Kapitel I: Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsmodelle der Beispiele 1-4:

Unterschiede:

- Bei den **Beispielen 1-3** ist die Grundgesamtheit endlich oder abzählbar unendlich. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse diese Ereignisses berechnet werden:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

- Bei **Beispiel 4** ist die **Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis 0**. Ebenso für jede endliche und jede abzählbar unendliche Teilmenge.

  Nur für eine überabzählbare unendliche Teilmenge kann Wahrscheinlichkeit positiv sein.

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

1. Feststellung der Elementarereignisse und Zusammenfassung einer Grundgesamtheit Ω.

2. Kombination von Elementarereignissen: ein (zusammengesetztes) Ereignis.

   Damit: Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Grundgesamtheit. Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt bei der Durchführung des Zufallsprozesses ein, wenn eines der Elementarereignisse in A eintritt.

3. Zusammenstellung aller Ereignisse:

   System von Teilmengen von Ω, $A(\Omega)$ *(nicht immer alle Teilmengen von Ω; z.B, wenn $\Omega = \mathbb{R}$ ist)*

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

1. Feststellung der Elementarereignisse und Zusammenfassung einer Grundgesamtheit Ω.

2. Kombination von Elementarereignissen: ein (zusammengesetztes) Ereignis.

   Damit: Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Grundgesamtheit. Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt bei der Durchführung des Zufallsprozesses ein, wenn eines der Elementarereignisse in A eintritt.

3. Zusammenstellung aller Ereignisse:

   System von Teilmengen von Ω, $A(\Omega)$ *(nicht immer alle Teilmengen von Ω; z.B, wenn $\Omega = \mathbb{R}$ ist)*

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

1. Feststellung der Elementarereignisse und Zusammenfassung einer Grundgesamtheit Ω.

2. Kombination von Elementarereignissen: ein (zusammengesetztes) Ereignis.

   Damit: Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Grundgesamtheit. Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt bei der Durchführung des Zufallsprozesses ein, wenn eines der Elementarereignisse in A eintritt.

3. Zusammenstellung aller Ereignisse:

   System von Teilmengen von Ω, $A(\Omega)$ *(nicht immer alle Teilmengen von Ω; z.B, wenn $\Omega = \mathbb{R}$ ist)*

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

1. Feststellung der Elementarereignisse und Zusammenfassung einer Grundgesamtheit Ω.

2. Kombination von Elementarereignissen: ein (zusammengesetztes) Ereignis.

   Damit: Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Grundgesamtheit. Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt bei der Durchführung des Zufallsprozesses ein, wenn eines der Elementarereignisse in A eintritt.

3. Zusammenstellung aller Ereignisse:

   System von Teilmengen von Ω, $A(\Omega)$ *(nicht immer alle Teilmengen von Ω; z.B, wenn $\Omega = \mathbb{R}$ ist)*

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

4.) Zu jedem Ereignis A kann eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ angegeben werden. Die Funktion P, die jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zuordnet, wird als Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet.

5.) Dabei müssen für die Ereignisse und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten Rechenregeln gelten (insbesondere die, die sich aus den Regeln für relative Häufigkeiten ergeben).

Ergebnis der Modellierung: Wahrscheinlichkeitsraum

Kapitel I: Zusammenfassung

Modellierung eines Zufallsprozesses:

4.) Zu jedem Ereignis A kann eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ angegeben werden. Die Funktion P, die jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zuordnet, wird als Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet.

5.) Dabei müssen für die Ereignisse und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten Rechenregeln gelten (insbesondere die, die sich aus den Regeln für relative Häufigkeiten ergeben).

Ergebnis der Modellierung: Wahrscheinlichkeitsraum

Beispiel: Roulette

Elementarereignisse:

$0, 1, 2, \ldots, 36$

Ereignisse:

- untere Hälfte $\{1, \ldots, 18\}$
- obere Hälfte $\{19, \ldots, 36\}$
- schwarz
- rot
- unteres Drittel $\{1, 2, \ldots, 12\}$
- mittleres Drittel $\{13, \ldots, 24\}$
- oberes Drittel $\{25, \ldots, 36\}$

Für alle Teilmengen $P(A) = \frac{\#A}{37}$, z.B. $P(\text{unteres Drittel}) = \frac{12}{37}$

Beispiel: Roulette

Elementarereignisse:

$0, 1, 2, \ldots, 36$

Ereignisse:

- untere Hälfte $\{1, \ldots, 18\}$
- obere Hälfte $\{19, \ldots, 36\}$
- schwarz
- rot
- unteres Drittel $\{1, 2, \ldots, 12\}$
- mittleres Drittel $\{13, \ldots, 24\}$
- oberes Drittel $\{25, \ldots, 36\}$

Für alle Teilmengen $P(A) = \frac{\#A}{37}$, z.B. $P(\text{unteres Drittel}) = \frac{12}{37}$

Beispiel: Roulette

<u>Elementarereignisse:</u>

$0, 1, 2, \ldots, 36$

<u>Ereignisse:</u>

- untere Hälfte $\{1, \ldots, 18\}$
- obere Hälfte $\{19, \ldots, 36\}$
- schwarz
- rot
- unteres Drittel $\{1, 2, \ldots, 12\}$
- mittleres Drittel $\{13, \ldots, 24\}$
- oberes Drittel $\{25, \ldots, 36\}$

Für alle Teilmengen $P(A) = \frac{\#A}{37}$, z.B. $P(\text{unteres Drittel}) = \frac{12}{37}$