Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel II - Entscheidungen bei Informationen über den wahren Zustand

Induktive Statistik

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Ziel in einer Entscheidungssituation:

- Über wahren Zustand möglichst genaue Kenntnis verschaffen
- Es ist zu beachten, dass das Verhältnis zwischen dem Nutzen und den Kosten der Kenntnisgewinnung angemessen ist
- Bei "vollständiger Information" kann man die exakte Kenntnis des wahren Zustands z_w erlangen

$\Longrightarrow$ "einfaches" Optimierungsproblem:
Gesucht ist die Optimalstelle a^* der Funktion

$$S(\cdot, z_w) : A \to \mathbb{R}$$

Ziel in einer Entscheidungssituation:

- In den meisten Fällen ist keine exakte Kenntnis erreichbar
- Die Information, die man erhält, ist nicht vollständig

$\Longrightarrow$ Es besteht keine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Information und Zustand,

z.B. Wettervorhersage

Ziel in einer Entscheidungssituation:

- Wie kann der Zusammenhang zwischen wahrem Zustand und Information modelliert werden?
- Sei $\mathcal{I}$ die Menge der möglichen Informationen (Informationenraum), also der möglichen Werte ("Signale")

$\Longrightarrow$ Im Beispiel der Wettervorhersage kann der Informationswert für einen bestimmten Tag etwa lauten:

- Temperatur zwischen 15° und 20°C
- Luftfeuchtigkeit 40% bis 50%
- leicht bewölkt
- keine Niederschläge

Ziel in einer Entscheidungssituation:

- Der Einfluss des wahren Zustands auf die Information ist formal zu beschreiben
- Möglichkeit: Davon ausgehen, dass der Informationswert ein (zufälliges) Ereignis ist, dessen Wahrscheinlichkeit von dem wahren Zustand beeinflusst ist
- Mathematisch formuliert heisst dies, dass man für jedes $z \in Z$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_z auf $\mathcal{I}$ erhält
- $\mathcal{I}$ wird also mit P_z zu einem Wahrscheinlichkeitsraum

$\Longrightarrow$ Man erhält also eine Menge $(\mathcal{I}, A(\mathcal{I}), P_z)_{z \in Z}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen

Beispiel - Warenpartie

Entscheidung über Annahme bzw. Ablehnung einer Warenpartie

- Man hat also zwei Entscheidungen, wobei das Ergebnis wesentlich vom Ausschussanteil abhängt
- Informationen über den Ausschussanteil durch eine Totalkontrolle ("vollständige Information") oder eine Stichprobenkontrolle gewinnen
- Bei einer Stichprobenkontrolle ist die Erkenntnis zufällig, aber beeinflusst durch den tatsächlichen Ausschussanteil: Bei einem hohen tatsächlichen Ausschussanteil wird auch mit großer Wahrscheinlichkeit der Ausschussanteil in der Stichprobe groß sein

Beispiel - Warenpartie

Die Anzahl schlechter Teile in der Stichprobe ist binomialverteilt mit Parameter p (p ist der Ausschussanteil der Partie) bei Stichproben mit Zurücklegen und hypergeometrisch verteilt bei Stichproben ohne Zurücklegen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit der Information, die wir durch die Stichprobe erhalten (Anzahl schlechter Teile in der Stichprobe) vom Ausschussanteil der Partie (wahrer Zustand) abhängig.

Beispiel - Warenpartie

Die **Menge** der **möglichen Informationen**:

$\mathcal{I} = \{0, \ldots, n\}$, ($n$:= Umfang der Stichprobe)

Für einen wahren Ausschussanteil $p \in [0,1]$ erhalten wir die Wahrscheinlichkeit:

$$P_p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

wobei $0^0 \overset{def}{=} 1$ und X
die zufällige Anzahl der schlechten Teile bezeichnet

Bei Vorliegen von Information wird man bei der Entscheidung diese Information berücksichtigen.
D.h.: Bei einem rationalen Vorgehen ist die Entscheidung *eindeutig* durch den vorliegenden Informationswert festgelegt.
Man wird demnach eine Entscheidungstabelle oder Entscheidungsfunktion festlegen, an der man zu jeder Information die zugehörige Entscheidung ablesen kann.
Es ist jetzt nicht mehr **eine** optimale Entscheidung gesucht, sondern zu **jeder** Information eine optimale Entscheidung, also eine optimale **Entscheidungsfunktion**.

Die Menge aller Entscheidungsfunktionen, aus denen die optimale auszuwählen ist, ist die Menge aller Abbildungen $\delta : \mathcal{I} \to A$.
Mit $\Delta = \{\delta \mid \delta : \mathcal{I} \to A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Entscheidungsfunktionen.

Beispiel - Warenpartie

Kontrolle der Warenpartie:
Wir nehmen die folgenden Entscheidungsfunktionen als Beispiele:

$$\delta_1(k) = \begin{cases} \text{Annahme} & \text{für } k = 0 \\ \text{Ablehnung} & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$\delta_2(k) = \begin{cases} \text{Annahme} & k \leq 2 \\ \text{Ablehnung} & k > 2. \end{cases}$$

Sei $z \in Z$ ein beliebiger Zustand, $\delta \in \Delta$ eine Entscheidungsfunktion. Dann ist

$S(\delta(i), z)$ der Schaden bei Zustand z und Information i.

Zu jedem $z \in Z$ erhält man also bei gegebenem $\delta \in \Delta$ eine Abbildung

$$S_{\delta,z} := S(\delta(\cdot), z) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}.$$

Mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_z ist der Schaden damit zufällig, d.h. $S_{\delta,z}$ ist eine Zufallsvariable. Man erhält so für jede Entscheidungsfunktion δ eine Familie $S_\delta := (S_{\delta,z})_{z\in Z}$ von Zufallsvariablen.
Ein Vergleich von zwei Entscheidungsfunktionen δ, δ' muss demnach auf einem Vergleich der beiden Familien S_δ und $S_{\delta'}$ von Zufallsvariablen beruhen.

Beispiel - Warenpartie

Der Umfang der Stichprobe sei (mit Zurücklegen) $n = 100$.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit für k schlechte Teile
in der Stichprobe:

$$P_p(\text{Anzahl schlechter Teile} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

wobei p der tatsächliche Ausschussanteil ist
(*Binomialverteilung mit Parameter* p)

Beispiel - Warenpartie

Wiederholung der genannten Entscheidungsfunktionen:

$$\delta_1(k) = \begin{cases} 0 & \text{(Ablehnung)} \quad k > 0 \\ 1 & \text{(Annahme)} \quad k = 0 \end{cases}$$

$$\delta_2(k) = \begin{cases} 0 & k > 2 \\ 1 & k \leq 2 \end{cases}$$

Beispiel - Warenpartie

Mit Schadensfunktion (z.B.)...

$S(0,p) =$

$$\begin{cases} 0 & p > 0,01 \\ 200 & p \leq 0,01 \end{cases}$$ Ablehnung ($\delta = 0$) einer Warenpartie mit Ausschussanteil p

$S(1,p) =$

$$\begin{cases} 5000 & p > 0,01 \\ 0 & p \leq 0,01 \end{cases}$$ Annahme ($\delta = 1$) einer Warenpartie mit Ausschussanteil p

... erhält man damit für gegebenes p die Zufallsvariablen $S_{\delta_1,p}$ und $S_{\delta_2,p}$ mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...

Beispiel - Warenpartie

1. $p \leq 0.01$:

$$\begin{aligned}
P(S_{\delta_1,p} = 0) &= \binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} = (1-p)^{100} \\
P(S_{\delta_1,p} = 200) &= 1 - (1-p)^{100} \\
P(S_{\delta_2,p} = 0) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \\
P(S_{\delta_2,p} = 200) &= 1 - P(S_{\delta_2,p} = 0) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}
\end{aligned}$$

Beispiel - Warenpartie

2. Für $p > 0.01$:

$$\begin{aligned} P(S_{\delta_1,p} = 5000) &= (1-p)^{100} \\ P(S_{\delta_{1,p}} = 0) &= 1 - (1-p)^{100} \end{aligned}$$

Beispiel - Warenpartie

2. Für $p > 0.01$:

$$\begin{aligned} P(S_{\delta_2,p} = 5000) &= P_p(\delta_2 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \\ P(S_{\delta_2,p} = 0) &= P_p(\delta_2 = 0) \\ &= \sum_{k=3}^{100} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \end{aligned}$$

Beispiel - Warenpartie

Zu vergleichen sind also die Zufallsvariablen $S_{\delta_1,p}$ und $S_{\delta_2,p}$ für jeden in Frage kommenden Ausschussanteil p.

Eine Möglichkeit:
Diese Familien von Zufallsvariablen dadurch vergleichen, dass man die Erwartungswerte berechnet:

$$E[S_{\delta,z}] \qquad \text{für jedes} \qquad z \in Z.$$

Man erhält damit zu jedem $z \in Z$ den zu erwartenden Schaden bei der Entscheidungsfunktion δ, diese Größe hängt von z und δ ab (In unserem Beispiel wird der Zustand z durch den Parameter p festgelegt).

Sei die Funktion R in z und δ definiert durch

$$R(\delta, z) = E[S_{\delta,z}] = E[S(\delta(\cdot), z)],$$

so ist R eine Funktion von $\Delta \times Z$ in die rellen Zahlen:

$$R : \Delta \times Z \to \mathbb{R}.$$

R heißt *Risikofunktion*.

Vorausgesetzt wird dabei: Existenz und Berechnungsmöglichkeit des Erwartungswertes.

$\Longrightarrow$ Damit Δ als "neuer" Aktionenraum und R als "neue" Schadensfunktion

Beispiel - Warenpartie

Bei den Entscheidungsfunktionen δ_1 und δ_2 von oben erhält man:

1. $p \leq 0.01$:

$$
\begin{aligned}
R(\delta_1, p) &= 0 \cdot P(S_{\delta_1,p} = 0) + 200 \cdot P(S_{\delta_1,p} = 200) \\
&= 200 \cdot (1 - (1-p)^{100}) \\
&= 200 - 200 \cdot (1-p)^{100} \\
R(\delta_2, p) &= 200 \sum_{k=3}^{100} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \\
&= 200 - 200 \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}
\end{aligned}
$$

Beispiel - Warenpartie

2. $p > 0.01$:

$$
\begin{aligned}
R(\delta_1, p) &= 5000 \cdot P(\delta_1 = 1) + 0 \cdot P(\delta_1 = 0) \\
&= 5000 \cdot (1-p)^{100} \\
R(\delta_2, p) &= 5000 \cdot \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}
\end{aligned}
$$

Beispiel - Warenpartie

Ein Vergleich zeigt, dass

$$R(\delta_2, p) < R(\delta_1, p) \quad \text{(für alle)} \quad 0 < p \leq 0.01$$

und

$$R(\delta_2, p) > R(\delta_1, p) \quad \text{(für alle)} \quad 0.01 < p < 1$$

gilt.