Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel XIV - Anpassungstests

Induktive Statistik

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

2. Grundannahme: (*Verteilungsannahme*)

Für die den Umweltzustand beschreibende Zufallsvariable Y kann eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben werden, der die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y angehört.

Sei W die Klasse der Verteilungen, $\mathcal{F}_W$ die Menge der zugehörigen Verteilungsfunktionen

Aufgabe: Überprüfung der Verteilungsannahme

Formal:

Sei $P(F)$ die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung (Verteilungsfunktion) der Zufallsvariable Y.

Gehört $P(F)$ der Klasse W der Wahrscheinlichkeitsverteilungen (F_W der Verteilungsfunktionen) an?

Zwei Entscheidungsmöglichkeiten (ja/nein): Testaufgabe

Information: Stichprobenwerte

Hypothesen:

$$H_0 : P \in W \quad (F \in F_W) \quad \text{gegen} \quad H_1 : P \notin W \quad (F \notin F_W)$$

Vorgehensweise bei parametrischer Verteilungsannahme:

- Schätzung des Parameter(vektor)s γ durch einen Schätzwert $\hat{\gamma}$
- Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{\hat{\gamma}}$ (Verteilungsfunktion $F_{\hat{\gamma}}$) zum Schätzwert $\hat{\gamma}$
- Prüfen, ob $P = P_{\hat{\gamma}}$ ($F = F_{\hat{\gamma}}$) mit den Stichprobenwerten vereinbar ist. Dabei ist der Schätzfehler zu berücksichtigen, genauer, dass der Schätzwert selbst zufällig ist.

Zunächst **vereinfachtes Problem**:

Prüfung, ob die Verteilung einer Zufallsvariable mit einer vorgegebenen Verteilung übereinstimmt. (W enthält nur ein Element.)

Vorteil:

Das Schätzproblem und die Berücksichtigung des Schätzfehlers entfällt.

Sei P_0 diese Wahrscheinlichkeitsverteilung und F_0 die zugehörige Verteilungsfunktion. Die Hypothesen lauten jetzt:

$$H_0 : P = P_0 \quad (F = F_0) \quad \text{gegen} \quad H_1 : P \neq P_0 \quad (F \neq F_0)$$

Anpassungstests nach Kolmogorow-Smirnow

Ansatzpunkt: Hauptsatz der Statistik

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{t\in\mathbb{R}} |F^{emp,n}(t) - F(t)| < \epsilon) = 1$$

Die Empirische Verteilungsfunktion $F^{emp,n}$ und die tatsï¿½chliche Verteilungsfunktion F weichen für großes n kaum voneinander ab.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ sei das Stichprobenergebnis,

$k_n(x) =$ supremaler Abstand,

$F^{emp,n}(t)$ die zugehörige empirische Verteilungsfunktion.

Entscheidungsfunktion:

$$\delta_c(x) = \begin{cases} d_0 & k_n(x) \leq c \\ d_1 & k_n(x) > c \end{cases}$$

Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art: $P_{F_0}(k_n(X) > c)$

Zur Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art wird die Verteilung der Zufallsvariablen $k_n(X)$ bei Gültigkeit der Nullhypothese benötigt.

Eigenschaft:

Die Verteilung der Zufallsvariablen $k_n(X)$ bei Gültigkeit der Nullhypothese stimmt für alle stetigen Verteilungen überein. ($k_n(X)$ ist unabhängig von der Ausgangsverteilung, man sagt "$k_n(X)$ ist *verteilungsfrei*").

Grund:

Der Abstand der empirischen Verteilungsfunktion von der theoretischen ändert sich bei einer Transformation bei stetigen Verteilungen nicht. Stetige Verteilungen können ineinander überführt werden.

Sei

$$F_{k_n(X)}(t) \text{ die Verteilungsfunktion von } k_n(X)$$

dann gilt

$$P_I(\delta_c, P_0) = P_{P_0}(k_n(X) > c) = 1 - F_{k_n(X)}(c) = \alpha$$

$\iff$ c ist das $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung von $k_n(X)$, welces im Folgenden, z.B. auf Seite 14, als $d_{n,1-\alpha}$ bezeichnet wird.

Die Quantile sind für die üblichen Werte von α tabelliert.

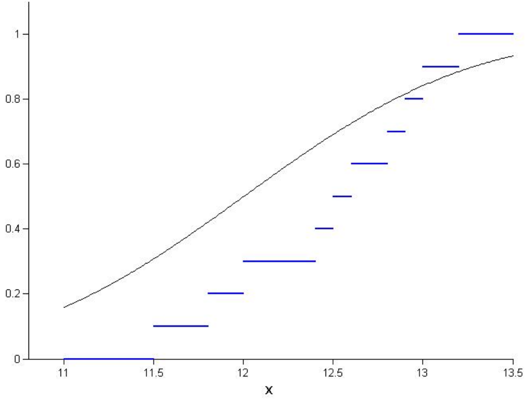
Beispiel: s. Büning/Trenkler S. 69

Es sei zu testen, ob für einen bestimmten PKW-Typ der Benzinverbrauch in Litern pro 100 km bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h normalverteilt ist mit $\mu = 12$ und $\sigma = 1$.

Eine Stichprobe von 10 Fahrzeugen dieses Typs ergab folgenden Literverbrauch auf 100km:

12.4, 11.8, 12.9, 12.6, 13.0, 12.5, 12.0, 11.5, 13.2, 12.8

Die theoretische Verteilungsfunktion $F_{\mu,\sigma}(x)$ und die empirische Verteilungsfunktion $F^{emp,n}(x)$ sind auf der nächsten Abbildung dargestellt:



$$F_n^{emp}(x) \text{ und } F_{\mathcal{N}(12,1)}(x) = F_0(x)$$

$x_{(i)}$	11.5	11.8	12.0	12.4	12.5	12.6	12.8	12.9	13.0	13.2
$F_{\mu,\sigma}$	0.3085	0.4207	0.5000	0.6554	0.6915	0.7257	0.7881	0.8159	0.8413	0.8849
unterer Wert	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
oberer Wert	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
Abweichung	.3085	.3207	.3000	.3554	.2915	.2257	.1881	.1159	.0587	.1151

Wert der Testgröße ist damit 0.3554.

Zum Niveau $\alpha = 0.05$ ist die Testschranke $d_{10,0.95} = 0.409$.

Die Nullhypothese wird also nicht abgelehnt.

Kritische Grenzen beim Kolmogorov - Smirnov - Anpassungstest:

(Die Tabelle gibt folgende kritischen Grenze für den Einstichprobentest an: Beim einseitigen Test: $d^+_{n;1-\alpha}$ maximal mit $P(D^+_n \leq d^+_{n;1-\alpha}) \leq 1-\alpha$; beim zweiseitigem Test: $d_{n;1-\alpha}$ maximal mit $P(D_n \leq d_{n;1-\alpha}) \leq 1-\alpha$;)

einseitig: $d^+_{n;1-\alpha}$ **zweiseitig:** $d_{n;1-\alpha}$	$\alpha = 0.005$ $\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.01$ $\alpha = 0.02$	$\alpha = 0.025$ $\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.1$ $\alpha = 0.2$
$n = 1$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900
2	0.929	0.900	0.842	0.776	0.864
3	0.829	0.785	0.708	0.636	0.565
4	0.734	0.689	0.624	0.565	0.493
5	0.669	0.627	0.563	0.509	0.447
6	0.617	0.577	0.519	0.468	0.410
7	0.576	0.538	0.483	0.436	0.381
8	0.542	0.507	0.454	0.410	0.358
9	0.513	0.780	0.430	0.387	0.339
10	0.489	0.457	0.409	0.369	0.323
11	0.468	0.437	0.391	0.352	0.308
Näherung für $n > 40$	$\frac{1.6276}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.5174}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.3581}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.2239}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.0730}{\sqrt{n}}$

Beim allgemeinen Testproblem

$$H_0 : F \in F_W \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : F \notin F_W$$

kann im Fall einer parametrischen Verteilungsannahme als Testgröße

$$\hat{k}_n(x) = \sup_t |F^{emp,n}(t) - F_{\hat{\gamma}}(t)|$$

verwendet werden. Dabei ist

$$F_{\hat{\gamma}}(t)$$

der Wert der Verteilungsfunktion bei dem Schätzwert $\hat{\gamma}$ des Parameters an der Stelle t.

Die Verteilung der zugehörigen Zufallsvariable

$$\hat{k}_n(X)$$

stimmt aber nicht mit der Verteilung von $k_n(X)$ für wahren Parameter überein.

Benutzt man bei der Entscheidungsfunktion

$$\delta_c(x) = \begin{cases} d_0 & \hat{k}_n(x) \le c \\ d_1 & \hat{k}_n(x) > c \end{cases}$$

dennoch die Testschranken $d_{n,1-\alpha}$, so hat der Test eine Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von weniger als α, (man sagt, der Test ist *konservativ*).

χ^2-Anpassungstest (für diskrete Verteilungen)

Hypothesen:

$$H_0 : P = P_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : P \neq P_0$$

Ansatzpunkt:

Vergleich der relativen Häufigkeiten bei den Realisationen (Beobachtungen) mit den Wahrscheinlichkeiten.

Voraussetzung: Es gibt Häufungen

Wenn nicht:

- Zusammenfassung von Werten zu Gruppen (gruppierte Daten) bzw.
- Einteilung des Wertebereichs in Klassen (klassierte Daten)

Nachteil: Willkür bei der Gruppenbildung bzw. Klassierung

Sei n der Stichprobenumfang und

p_k	Wahrscheinlichkeit für einen Wert α_k (in Gruppe k, Klasse k)
$n \cdot p_k$	theoretische Häufigkeit für den Wert α_k bei n Wiederholungen des Zufallsexperiments (Beobachtungen)
$h_k(x)(p_k(x))$	absolute (relative) Häufigkeit der Stichprobenwerte mit Wert α_k (in Gruppe k, Klasse k) beim Stichprobenergebnis x

Vergleich von absoluten/relativen Häufigkeiten und theoretischen Häufigkeiten mit der **Testgröße**:

$$\chi^2(x) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(h_k(x) - np_k)^2}{np_k} = n \cdot \sum_{k=1}^{K} \frac{(p_k(x) - p_k)^2}{p_k}$$

Entscheidungsfunktion:

$$\delta_c(x) = \begin{cases} d_0 & \chi^2(x) \leq c \\ d_1 & \chi^2(x) > c \end{cases}$$

Ermittlung der Testschranke zu vorgegebenem Niveau:

$$P_I(\delta_c, P_0) = P_{P_0}(\chi^2(X) > c)$$

Benötigt: Verteilung von $\chi^2(X)$ (schwierig zu berechnen)

Satz:

$\chi^2(X)$ ist asymptotisch $\chi^2(K-1)$-verteilt.

Folgerung: Das $(1-\alpha)$-Quantil der $\chi^2(K-1)$-Verteilung ist eine

Approximation der exakten Testschranke.

Bemerkung: Um gute Ergebnisse zu erzielen, sollte die Gruppierung bzw. Klassierung so gewählt werden, dass $p_1 = p_2 = \ldots = p_K = 1/K$ und K klein gegenüber n ist.

Beispiel: (Büning/Trenkler, S. 75)

Mit einem Computer werden 500 vierstellige Zufallszahlen erzeugt, die über dem Intervall [0,1] gleichverteilt sein sollen.

Die folgende Übersicht zeigt die gewählte Einteilung in $K = 10$ Klassen mit den absoluten Häufigkeiten $h_k(x)$ der in der k-ten Klasse aufgetretenen Zufallszahlen

$(k = 1, \ldots, 10)$.

Klasse	1	2	3	4	5
	[0.0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)
$h_k(x)$	51	46	44	54	49

Klasse	6	7	8	9	10
	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)	[0.7,0.8)	[0.8,0.9)	[0.9,1.0)
$h_k(x)$	42	47	63	58	46

Bei Annahme einer Gleichverteilung (Nullhypothese) der Zufallsvariablen sind in jeder der Klassen wegen der insgesamt $n = 500$

Zufallszahlen genau 50 Zufallszahlen zu erwarten.

Testgröße in diesem Beispiel: 7.84

Zum Niveau $\alpha = 0.05$ wird die Nullhypothese wegen $\chi^2(9)_{0.95} = 16.92$ nicht abgelehnt.

Beim zusammengesetzten Testproblem sind zuerst die Parameter zu schätzen.

Die Parameter können dabei aus

- den Stichprobenergebnissen direkt
- den gruppierten/klassierten Daten

mit Hilfe von ...

...

- GBE-Schätzfunktionen
- ML-Schätzfunktionen
- anderen Schätzverfahren

geschätzt werden.