Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Lehrstuhl für Ökonometrie und Statistik

Kapitel I - Das klassische Entscheidungsmodell

Induktive Statistik

Prof. Dr. W.-D. Heller
Hartwig Senska
Carlo Siebenschuh

Die drei grundlegenden Aufgabenstellungen der schließenden Statistik

Beispiel: *Kontrolle einer Warenpartie mit N Produkteinheiten*
Aufgabenstellung: Ermittlung des Qualitätsniveaus der Warenpartie mittels einer Stichprobe.
Was heißt Qualitätsniveau ?
Z.B.: **Ausschussanteil**, **damit:** Entscheidung über den Ausschussanteil

Aufgaben der induktiven Statistik:

Festlegung eines Entscheidungsverfahrens auf der Grundlage des Ergebnisses einer Stichprobe (z.B. Annahme/Ablehnung der Nullhypothese)

Problem:

Fehlentscheidungen sind nicht auszuschließen, da die Information aus der Stichprobe unvollständig ist.

Mögliche Vorgehensweise:

1. Entscheidung:

Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Warenpartie

Schritt 1: Überlegung, bis zu welchem Ausschussanteil die Annahme einer Warenpartie noch sinnvoll ist:
Tolerierbarer Ausschussanteil p_0

Schritt 2: Hypothesen über die Warenpartie:
p *wahrer Ausschussanteil*

H_0: $p \leq p_0$	H_1: $p > p_0$
Nullhypothese	*Gegenhypothese*

Mögliche Vorgehensweise:

Somit als Resultat:

Annahme der Warenpartie:	*Nullhypothese konnte nicht* verworfen werden.
Ablehnung der Warenpartie:	*Gegenhypothese wird für richtig* angesehen.

Mögliche Vorgehensweise:

2. Entscheidung:
Angabe eines auf Grund des Stichprobenergebnisses für sinnvoll erachteten Wertes des Ausschusanteils der Warenpartie ("Schätzwert" für den Ausschussanteil)
Problem: Eine Stichprobe liefert nur eine unvollständige Information.

$\Rightarrow$ Angabe eines wahren Werts für den Ausschussanteil auf Grund der Stichprobe ist nicht möglich. Es kann nur ein **Schätzwert** angegeben werden.

Mögliche Vorgehensweise:

Entscheidung: Angabe eines Ausschussanteils, der ausgehend von dem Stichprobenergebnis als sinnvoller möglicher Ausschussanteil angesehen werden kann.

Problem: Es ist unbekannt, wie weit man mit dem Schätzwert vom wahren Wert entfernt ist. Der Schätzfehler kann nur über eine Totalerhebung ermittelt werden.

Mögliche Vorgehensweise:

3. Entscheidung

Angabe eines Schätzbereiches:

Ein Schätzwert ist wegen der beschriebenen Unsicherheit unbefriedigend.

Besser: Angabe eines Bereiches, der mit hoher Sicherheit den wahren Wert abdeckt.

Problem: Je größer der Bereich, desto größer die Sicherheit, dass der wahre Wert abgedeckt ist. Aber je größer der Bereich, desto geringer die darin enthaltene Information.

$\Rightarrow$ Vorgabe einer Wahrscheinlichkeit, mit der der Bereich den wahren Wert abdeckt. *(Konfidenz- oder Vertrauensintervall)*

Zusammenfassung

3 Entscheidung und damit 3 Aufgabenstellungen der schließenden Statistik:

1. Entscheidung über zwei Hypothesen ("Tests")
2. Angabe eines Schätzwertes ("Punktschätzung")
3. Angabe eines Schätzbereichs ("Bereichschätzung")

Zur Einordnung in die Entscheidungstheorie wird zunächst eine formale Darstellung einer Entscheidungssituation betrachtet.

Entscheidungstheoretische Darstellung

Z Menge von Zuständen **(Zustandsraum)**,
von denen genau einer zutrifft.
Im Beispiel: Zustand = Ausschussanteil

$$Z = \{\tfrac{k}{N} \mid k = 0, 1, 2, \dots, N\} \subset [0, 1]$$

A Menge von Aktionen bzw. Entscheidungen **(Aktionenraum)**
(Hypothesen ermitteln und annehmen/ablehnen,
Schätzwert, Schätzbereich)

E Menge von Ergebnissen (Ergebnisraum) abhängig von
Aktion (i.d.R. E $=\mathbb{R}$)

f Funktion ($A \times Z \to E$) mit $e = f(a, z)$; gibt zu jeder
Kombination aus Zustand $z \in Z$ und Aktion
$a \in A$ das Ergebnis $e \in E$ an

1) Schaden bei fälschlicher Ablehnung/Annahme einer bestimmten Hypothese.

2) Schaden abhängig von Differenz zwischen wahrem und geschätztem Wert.

3) Liegt Wert im geschätzten Intervall $\rightarrow$ Schaden ?

Entscheidungstheoretische Darstellung

Aufgabe: Entscheidung treffen bezüglich Aktion
Aktion wird beurteilt ("optimal"?) anhand eines Vergleichskriteriums (schafft *Präferenzen*).
Dies führt zur *Präferenzrelation*.

Entscheidungstheoretische Darstellung

Definition:
Sei M eine Menge
Eine Teilmenge $R \subset M \times M$ heißt *Präferenzrelation* auf M, wenn gilt:

- $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (transitiv)
- $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$ (reflexiv)

$(x, y) \in R$ wird interpretiert als "x ist mindestens gleich gut wie y".
Andere Schreibweise zu $(x, y) \in R : x \succeq y$

Entscheidungstheoretische Darstellung

- $(y, x) \notin R$ bzw. $y \not\succeq x$ bedeutet $x \succ y$
  "x wird y strikt vorgezogen"
- falls $x \succeq y$ und $y \succeq x$, schreibt man $x \sim y$
  "x und y sind äquivalent"

Entscheidungstheoretische Darstellung

Ausdruck für *Optimalität* von $m^* \in R$

- es gibt kein besseres Element in $m \in R$:
  Es gibt kein $x \in M$ mit $x \succ m^*$
- m^* wird allen anderen $x \in M$ vorgezogen:
  $m^* \succeq y \quad$ für alle $\; y \in M$

Definition

- falls es ein $m^* \in M$ gibt mit: Es gibt kein $x \in M$ mit
  $x \succ m^*$
  sagt man, m^* ist *maximal*
- falls es ein $m^* \in M$ gibt mit: $m^* \succeq x$ für alle $x \in M$
  sagt man, m^* ist *bestes* bzw. *größtes* Element

Beispiel (Bundesliga):

Sei M Menge der Bundesligamannschaften
Wenn $x \in M$ nicht gegen $y \in M$ verloren hat, gelte $x \succeq y$
Ist das eine Präferenzrelation? Gilt Transitivität?
Wäre das Punkteverhältnis eine Präferenzordnung?

Definition:
Eine Präferenzrelation $\preceq$ auf M heißt *vollständig* oder *Präferenzordnung*, wenn

für alle $x, y \in M$ gilt : $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.
Je zwei Elemente sind vergleichbar.

Durch Einführung einer Präferenzrelation verwandelt sich die Aktionenwahl in ein *abstraktes Optimierungsproblem*. Die beste Aktion wird rechentechnisch ermittelt.
Aufgabe: Festlegung der Präferenzrelation (Geschäftsprinzipien) bzgl. der Aktionen.
Dazu: Vergleichen aller Aktionen hinsichtlich der resultierenden Ergebnisse
Erfordert: Vergleichbarkeit der Ergebnisse, d.h. Präferenzrelation bzw. -ordnung auf E
Spezialfall: $E = \mathbb{R}$, (d.h.: $f : Z \times A \to E$ ist reellwertig)
"echtes" $\leq$ liefert eine Präferenzrelation R (inkl. Transitivität und Reflexivität (e, e)), d.h. gilt $e_1 < e_2$, so ist Ergebnis e_1 besser als e_2 mit $(e_1, e_2) \in R$.
Interpretation von $f(z, a) = e$ als *Schaden*. f ist *Schadensfunktion* (S statt f)

Bezeichnung

(A, Z, S) ist eine *Entscheidungssituation* bestehend aus

- Aktionenraum A
- Zustandsraum Z
- Schadensfunktion $S : A \times Z \to R$

Bezeichnung

Falls $A = \{a_1, \ \dots, a_m\}$ und $Z = \{z_1, \ \dots, z_n\}$ endlich

	z_1	$\dots$	z_j	$\dots$	z_n
a_1	s_{11}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	s_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	$\vdots$	$\dots$	s_{ij}	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_m	s_{m1}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	s_{mn}

mit $s_{ij} = S(a_i, z_j)$. Matrix $S = (s_{ij})$ heißt *Schadensmatrix*

Beispiel - Ausschussanteil

Ausschussanteil $p \in [0,1]$

Entscheidungen:

a_1: “Warenpartie ausliefern“
a_2: “Warenpartie nicht ausliefern“

Schaden bei

großem p und Auslieferung
kleinem p und keine Auslieferung

Sonst: kein Schaden

Beispiel - Ausschussanteil

Beispiel für Schadensfunktion

$$S(a_1, p) = \begin{cases} 0 & p \leq 0,01 \\ 5000 & p > 0,01 \end{cases}$$

$$S(a_2, p) = \begin{cases} 200 & p \leq 0,01 \\ 0 & p > 0,01 \end{cases}$$

Hier: "Grobe Betrachtung" der Entscheidungssituation
Meist: Differenzierbare Abhängigkeit des Schadens von p.

Beispiel - Ausschussanteil

Bezüglich Präferenzrelation $\preceq$ auf A:
Eine Aktion a_1 sollte a_2 präferiert werden ($a_1 \succeq a_2$), wenn der Schaden von a_1 bei allen Zuständen niedriger als oder höchstens gleich ist wie der Schaden
von a_2, also

$$S(a_1, z) \leq S(a_2, s) \;\; \text{für alle} \;\; z \in Z$$

Dominieren

Definition:
gegeben (A, Z, S)

a_1 *dominiert* a_2, falls
$S(a_1, z) \leq S(a_2, z)$ für alle $z \in Z$
a_1 *dominiert* a_2 *strikt*, falls
$S(a_1, z) \leq S(a_2, z)$ für alle $z \in Z$
und $S(a_1, z^0) < S(a_2, z^0)$ für mindestens ein $z^0 \in Z$

Dominanzprinzip

Definition:
Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation.
Eine Präferenzrelation $\preceq$ auf A genügt dem *Dominanzprinzip*, falls gilt

"dominiert $a_1 \in A$ die Aktion $a_2 \in A$
so gilt $a_1 \succeq a_2$"

Folgerung: Genügt $\preceq$ dem Dominanzprinzip, so kann man zur Bestimmung einer besten Aktion die dominierten Aktionen außer Acht lassen (*eliminieren*).

Dominanzprinzip

Satz:
Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation, $\preceq$ eine Präferenzrelation auf A,
die dem Dominanzprinzip genügt. Sei $A_0 \subset A$ eine Teilmenge von Aktionen mit
folgender Eigeschaft:

Zu jeder Aktion $a \notin A_0$ existiert eine Aktion $a' \in A_0$, die
a dominiert.

Dominanzprinzip

Dann gilt:

1. Gibt es eine maximale Aktion in A, so auch in A_0.
2. Eine Aktion $a^* \in A$ ist genau dann beste Aktion, falls sie allen Aktionen in A_0 vorgezogen wird:

$$a^* \succeq a \text{ für alle } a \in A_0$$

Die Präferenzrelation muss nicht genau bekannt sein zur *Eliminierung der dominierten Aktionen*; sie muss lediglich dem Dominanzprinzip genügen.

Dominanzprinzip

Definition:
(A, Z, S) sei Entscheidungssituation.
$a^* \in A$ dominiere alle Aktionen aus A.
Somit gilt für alle $a \in A$

$$S(a^*, z) \leq S(a, z), \forall z \in Z$$

Dann heißt a^* *gleichmäßig beste Aktion*
(Existiert nur in wenigen Fällen in der Praxis)

Gesucht:
Allgemeingültiges Verfahren, das jede Entscheidungssituation (A, Z, S) durch Angabe einer Präferenzrelation auf A vervollständigt.
Definition:
$(A, Z, S, \preceq)$ bestehend aus Entscheidungssituation (A, Z, S) und
Präferenzordnung $\preceq$ auf A, die dem Dominanzprinzip genügt, heißt
Entscheidungsmodell.

Beispiel - Entscheidungsmodell

Gegeben: Schadensmatrix

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3
a_1	3	2	5
a_2	3	3	2,5
a_3	4	3	2
a_4	2	1	5

Ansatz: Betrachte zu $a \in A : \max\limits_{z \in Z} S(a, z)$
Somit: $a \preceq a'$, falls $\max\limits_{z \in Z} S(a, z) \geq \max\limits_{z \in Z} S(a', z)$

Beispiel - Entscheidungsmodell

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3
a_1	3	2	5
a_2	3	3	2,5
a_3	4	3	2
a_4	2	1	5

$$\max_{z \in Z} S(a_1, z) = 5,$$
$$\max_{z \in Z} S(a_2, z) = 3,$$
$$\max_{z \in Z} S(a_3, z) = 4,$$
$$\max_{z \in Z} S(a_4, z) = 5$$

Somit:

$$a_2 \succ a_3 \succ a_1 \sim a_4$$

Vollständige Angabe der Präferenzordnung $R \subset A \times A$:

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_4), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_4, a_4)\}$$

Beispiel - Entscheidungsmodell

Hier: "optimal" ist a_2 mit

$$\max_{z \in Z} S(a_2, z) = \min_{a \in A} \max_{z \in Z} S(a, z) \quad \forall \; a, a^{'} \in A$$

Dieses Präferenzprinzip heißt *Minimax-Regel* oder *Wald-Regel*.

Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation.
Die Präferenzordnung $\preceq$ auf A definiert durch

$$a \preceq a', \text{ falls } \sup_{z \in Z} S(a, z) \geq \sup_{z \in Z} S(a', z)$$

heißt *Minimax*- oder *Wald-Regel*.

Beispiel

Qualitätskontrolle:

$$S(a_1, p) = \begin{cases} 0 & p \leq 0,01 \\ 5000 & p > 0,01 \end{cases}$$

$$S(a_2, p) = \begin{cases} 200 & p \leq 0,01 \\ 0 & p > 0,01 \end{cases}$$

Entscheidung: Partie ablehnen (a_2), da hierbei möglicherweise eintretender Schaden niedriger.

Aber: Generelle Ablehnung ist keine diskutable Entscheidung.

Definition

Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation, S nach oben und unten beschränkt.
Eine Präferenzordnung $\preceq$ auf A heißt
  (a) *Minimin-Regel*, wenn für alle $a, a' \in A$ gilt

$$a \succeq a' :\Longleftrightarrow \inf_{z \in Z} S(a, z) \leq \inf_{z \in Z} S(a', z)$$

Gegenüber Minimax-Regel ist Minimin-Regel äußerst optimistisch,
da Aktionen nach dem günstigsten Ergebnis beurteilt werden.

Definition

Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation, S nach oben und unten beschränkt.

(b) *Hurwicz-Regel mit Optimismusparameter* $\lambda \in [0,1]$, wenn für alle $a, a' \in A$ gilt

$$\begin{aligned} a \succeq a' :\iff &\quad (1-\lambda) \sup_{z \in Z} S(a,z) + \lambda \inf_{z \in Z} S(a,z) \\ \leq &\quad (1-\lambda) \sup_{z \in Z} S(a',z) + \lambda \inf_{z \in Z} S(a',z) \end{aligned}$$

zum Beispiel - Entscheidungsmodell:

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3	max	min	0.5 max +0.5 min
a_1	3	2	5	5	2	3.5
a_2	3	3	2.5	3	2.5	2.75
a_3	4	3	2	4	2	3
a_4	2	1	5	5	1	3

nach **Minimax-Regel**: a_1 und a_4 schlechteste Aktionen
nach **Minimin-Regel**: a_4 *optimale* Aktion
nach **Hurwicz-Regel**: abhängig vom Parameter λ (hier: $\lambda = 0,5$ und damit die optimale Aktion a_2.)

Weitere Präferenzregel:
Welcher Schaden muss auf jeden Fall in Kauf genommen werden bei gegebenem Zustand z?

$$\inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a}, z) \text{ mit } z \text{ fest}$$

ist *unvermeidbarer Schaden* bei Z.
Daher: Zerlegung des Schadens bei $a \in A$ in *unvermeidbaren* und *vermeidbaren* Schaden, also

$$S(a,z) = \underbrace{\inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a}, z)}_{\text{unvermeidbar}} + \underbrace{S(a,z) - \inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a}, z)}_{\text{vermeidbar}}$$

Definition

Die Funktion $R : A \times Z \to \mathbb{R}$ mit

$$R(a_i, z) = S(a_i, z) - \inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a}, z)$$

bezeichnet man als *Regretfunktion*.
Wendet man die Minimax-Regel auf die Regretfunktion an, so erhält man die
Minimax-Regret- oder *Savage-Niehans-Regel*
Voraussetzung: $\inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a}, z^0) \neq -\infty$

Definition

Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation, $S(\cdot, z)$ nach unten beschränkt für jedes $z \in Z$. Eine Präferenzordnung $\preceq$ heißt *Minimax-Regret-/* oder *Savage-Niehans-Regel*, wenn für alle $a, a' \in A$:

$$a \preceq a' :\Longleftrightarrow \sup_{z \in Z} R(a, z) \geq \sup_{z \in Z} R(a', z)$$

gilt.

Bsp. - Regretfunktion

Für die Schadensmatrix von zuvor haben wir

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3
a_1	3	2	5
a_2	3	3	2.5
a_3	4	3	2
a_4	2	1	5
min	2	1	2

zu

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3	max
a_1	1	1	3	3
a_2	1	2	0.5	2
a_3	2	2	0	2
a_4	0	0	3	3

Nach der Minimax-Regret-Regel sind damit die Aktionen a_2 und a_3 optimal.

Für das weitere Vorgehen ist es an dieser Stelle erforderlich nachzuweisen, dass es sich bei den angegebenen "Präferenzordnungen" tatsächlich um Präferenzordnungen handelt.
Dies ergibt sich jedoch aus folgendem allgemeinen Sachverhalt:
Sei $\succeq$ eine Relation auf einer Menge A und sei $f : A \to \mathbb{R}$ mit

$$a \succeq a' \Longleftrightarrow f(a) \leq f(a'),$$

so ist $\succeq$ reflexiv, transitiv und vollständig, also Präferenzordnung. Man sagt, *f repräsentiert die Präferenzrelation $\preceq$*.

Es ist auch zu prüfen, ob die vorliegenden Präferenzregeln dem Dominanzprinzip genügen.
Dabei kann man ausnützen, dass jeweils mit einer geeigneten Funktion f für alle $a, a' \in A$ gilt (Bemerkung 1):

$$a \succeq a' \Longleftrightarrow f(a) \leq f(a')$$

Es ist also jeweils zu zeigen:

$$S(a,z) \leq S(a',z) \text{ für alle } z \in Z \;\Rightarrow\; f(a) \leq f(a')$$

(Somit: dominiert Aktion a die Aktion a', folgt $f(a) \leq f(a') \Leftrightarrow a \succeq a'$, s.o.)

Gilt bei den angegebenen Präferenzrelationen:
"$S(a,z) \leq S(a',z)$ für alle $z \in Z \Rightarrow f(a) \leq f(a')$"
(a) Bei der Minimax-Regel kann man $f_1(a) = \sup\limits_{z \in Z} S(a,z)$
setzen

und es folgt unmittelbar.

(b) Bei der Minimin-Regel folgt dies ebenso mit
$f_2(a) = \inf\limits_{z \in Z} S(a,z)$
(c) Bei der Hurwicz-Regel folgt dies für $f_3 = (1-\lambda)f_1 + \lambda f_2$
aus

der Eigenschaft für f_1 und f_2.

Gilt bei den angegebenen Präferenzrelationen:
"$S(a,z) \leq S(a',z)$ für alle $z \in Z \Rightarrow f(a) \leq f(a')$"
(d) Bei der Minimax-Regret-Regel kann man
$f_4(a) = \sup\limits_{z \in Z} R(a,z)$ setzen. Aus

$$S(a,z) \leq S(a',z) \text{ für alle } z \in Z$$

folgt

$$S(a,z) - \inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a},z) \leq S(a',z) - \inf_{\hat{a} \in A} S(\hat{a},z),$$

also

$$R(a,z) \leq R(a',z)$$

und damit auch

$$f_4(a) \leq f_4(a').$$

In vielen Fällen wird der Entscheidende gewisse Vorstellungen darüber haben, wie häufig einzelne Zustände auftreten, bzw. wie “wahrscheinlich“ die Zustände sind. Bei den bisherigen Regeln wurden alle Zustände gleich berücksichtigt, man wird jedoch intuitiv unwahrscheinliche Zustände bei der Entscheidung weniger stark in die Beurteilung der Aktionen eingehen lassen.
$\Rightarrow$ *Entscheidender verfügt über Kenntnis über Wahrscheinlichkeitsverteilung*
der Zustände.

Damit:

Zustandsraum Z wird zu Wahrscheinlichkeitsraum $(Z, \mathcal{A}(Z), \pi)$.

π ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf Zustandsraum und kann "subjektiv" oder "objektiv" sein.

Damit wird für jede Aktion $a \in A$ der Schadensverlauf bezüglich $z \in Z$ eine
Zufallsvariable

$$S(a, \cdot) : (Z, \mathcal{A}(Z), \pi) \to \mathbb{R}.$$

Der Vergleich zweier Aktionen a und a' sollte damit auf dem Schadensverlauf, also dem Vergleich der Zufallsvariablen $S(a, \cdot)$ und $S(a', \cdot)$ beruhen.

Vergleichen von Zufallsvariablen?
Berücksichtigung der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung ist u. U. schwierig.
Ansatz: Vergleichen von Kennzahlen (Erwartungswert, Varianz. etc)
(Beispiel: Markowitz)

Beispiel: Vergleich von Erwartungswerten

Erwartungswert $E(S(a, \cdot))$ ist erwarteter ("mittlerer") Schaden bei Aktion a

Damit:

Beurteilung der Aktionen bezüglich erwartetem Schaden

$$a \succeq a' \Leftrightarrow E(S(a, \cdot)) \leq E(S(a', \cdot))$$

Der erwartete Schaden bei Aktion a ist kleiner oder gleich dem erwarteten Schaden bei Aktion a'.

Definition

Sei (A, Z, S) eine Entscheidungssituation, $(Z, \mathcal{A}(Z), \pi)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Z, derart dass

$$S(a, \cdot) : \; (Z, \mathcal{A}(Z), \pi) \to \mathbb{R}$$

für jedes $a \in A$ eine Zufallsvariable ist, deren Erwartungswert existiert.
Die Präferenzordnung $\succeq_\pi$ auf A mit

$$a \succeq_\pi a' :\Longleftrightarrow E[S(a, \cdot)] \leq E[S(a', \cdot)]$$

heißt *Bayes-Regel* oder *Erwartungswertregel bzgl. der a-priori-Verteilung* π.

Es folgt, dass $\succeq_\pi$ eine Präferenzordnung ist. Ebenso ist unmittelbar ersichtlich, dass die Bayes-Regel dem Dominanzprinzip genügt. Hat man keine konkrete Vorstellung über eine a-priori-Verteilung, so lässt sich die Bayes-Regel anwenden, indem man davon ausgeht, dass alle Zustände gleichwahrscheinlich sind. Damit ist dann $(Z, \mathcal{A}(Z), \pi)$ ein Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum. Die Bayes-Regel bei Laplacescher a-priori-Verteilung heißt auch *Laplace-Regel*.

Bei der Schadensmatrix gehe man von der a-priori-Verteilung $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ für die Zustände z_1, z_2, z_3 aus.

$A \backslash Z$	z_1	z_2	z_3		$E(S(a_i, \cdot))$
a_1	3	2	5	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 5$	3
a_2	3	3	2, 5	$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2}$	$\frac{35}{12}$
a_3	4	3	2	$\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 2$	$3\frac{1}{3}$
a_4	2	1	5	$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 5$	$\frac{13}{6}$
Π_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		

Man erhält als Bayes-Regel:

$$a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3.$$

Bei der Bayes-Regel wird nicht die volle Information benutzt, die die a-priori-Verteilung auf Z liefert. Z.B. könnte man auch die Streuung und höhere Momente berücksichtigen. Im weitesten Sinne müsste bei dem Vergleich zweier Aktionen a und a' die gesamte Information, die in den Zufallsvariablen $S(a, \cdot)$ und $S(a', \cdot)$ vorhanden ist, herangezogen werden.

Somit: Die Aktion a wird der Aktion a' vorgezogen, da die Zufallsvariable $S(a, \cdot)$ bei der a-priori-Verteilung π einen günstigeren Verlauf als $S(a', \cdot)$ hat. Man benötigt also letztlich ein Kriterium, anhand dessen man sagen kann, welcher der günstigere Verlauf bei zwei Zufallsvariablen ist, also eine Präferenzrelation auf der Menge

$$\{S(a, \cdot) \mid a \in A\}$$

der Zufallsvariablen unter Berücksichtigung der a-priori-Verteilung.

Durch die Annahme einer a-priori-Verteilung auf Z wird damit noch keine Entscheidung unmittelbar induziert, sondern nur die Entscheidung “auf eine andere Ebene gehoben“. Der Vergleich zwischen einzelnen Aktionen wird nun aufgrund der Verteilung für die möglicherweise auftretenden Schäden durchgeführt. Dadurch wird die zusätzliche Information mitverwertet. Beim Bayes-Verfahren erfolgt dann die Auswertung durch die Berechnung des Erwartungswertes. Eine Möglichkeit, zu einem umfassenderen Vergleichskriterium zu kommen, erhält man durch die Analyse der Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen.