Wo kommen die Betragsstriche her?

zu: Herleitung Transformationsformel Dichtefunktion (WT Kap. 7, Folien 23 ff.)

Erläuterung:

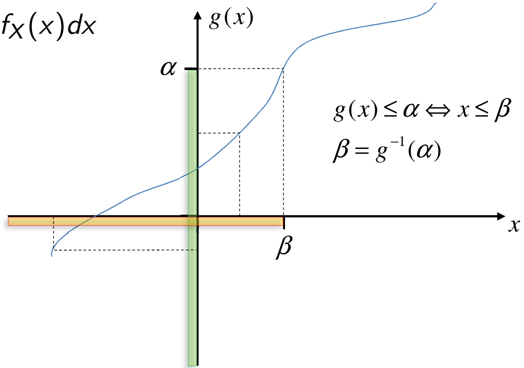
- bei stetigen Funktionen ist Invertierbarkeit im Wesentlichen auf strenge Monotonie zurückzuführen.
- Demonstration der Herkunft an zwei einfachen, überschaubaren Funktionen $g(x)$:
  - stetig
  - einfach stetig differenzierbar
  - Wertebereich $R_g = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
  - streng monoton steigend (1.) bzw. streng monoton fallend (2.).

(Nachweis für alle zulässigen Transformationsfunktionen aufwendiger, jedoch dem gleichen Grundprinzip folgend.)

zu 1.): $Y = g(X)$

$$F_Y(\alpha) = \int_{y \leq \alpha} f_Y(y)dy = \int_{g(x)\leq\alpha} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx$$



$g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow x \leq \beta$

$\beta = g^{-1}(\alpha)$

Ziel: Integral über y (zur späteren Differentiation) unter Verwendung der bekannten Dichtefunktion f_X.

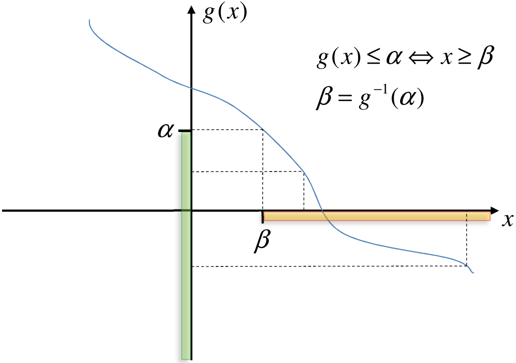
$$
\begin{aligned}
\text{Substitution:} \quad y &= g(x)\,,\; x = g^{-1}(y) \\
\frac{dy}{dx} &= \underbrace{g'(x)}_{\geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \left[g^{-1}\right]'(x) = \frac{1}{g'(x)} \\
&\Rightarrow dx = \frac{1}{g'(x)}\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\beta} f_X(x)dx &= \int_{g(-\infty)}^{g(\beta)} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(x)}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(g^{-1}(y))\underbrace{\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}}_{\geq 0}dy \\
&= \int_{y \leq \alpha} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}dy
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Hier Betragsstriche noch nicht unbedingt nötig, aber zur später universell einheitlichen Darstellung eingefügt.

zu 2.):

$$F_Y(\alpha) = \int_{y \le \alpha} f_Y(y)dy = \int_{g(x) \le \alpha} f_X(x)dx$$
$$= \int_{\beta}^{\infty} f_X(x)dx$$



gleiche Substitution: $y = g(x)$:

$$\int_{\beta}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{g(\beta)}^{g(\infty)} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(x)}dy$$
$$= \int_{\alpha}^{-\infty} f_X(g^{-1}(y))\underbrace{\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}}_{\leq 0}dy$$

Unterschied: noch unkonventionelle Integrationsgrenzen

$$F_Y(\alpha) = \int_{\beta}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{-g'(g^{-1}(y))}dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\alpha} f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}dy$$

geometrische Veranschaulichung: *(der Transformationsformel)*

Abbildung $g(x)$: Transport der Wahrscheinlichkeitsmasse von x nach $y = g(x)$.

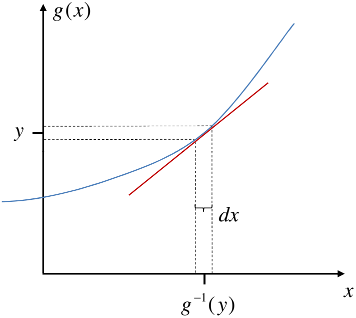
Dichte: Masse pro Volumen (beides infinitesimal klein, Differentiale)

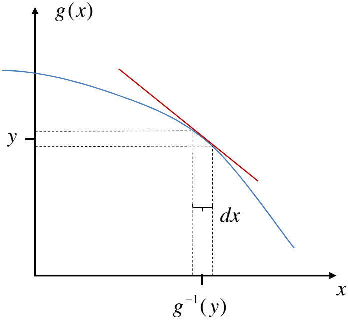
$$f_X(x) = \frac{dP}{dx} \text{ bzw. } dP = f_X(x)dx$$

Frage an einem Punkt y:

- wo kommt die Masse her? $x = g^{-1}(y)$
- für Dichte: Masse bleibt konstant, Breite des Träger verändert sich um einen Faktor $\Rightarrow$ Dichte ändert sich um den reziproken Faktor.

lokale Streckung und Stauchung des Trägerintervalls mit Breite dx:





- Approximation 1. Ordnung ist in Umgebung mit Breite dx um $x = g^{-1}(y)$ exakt. (Ergebnis aus der klassischen Analysis)
- Tangentensteigung $g'(x) = g'(g^{-1}(y))$
- Tangentensteigung bestimmt somit den Streckungsfaktor der (infinitesimalen) Intervallbreite: $\left|g'(g^{-1}(y))\right|$
  (Vorzeichen der Tangentensteigung dabei unerheblich)
- da übertragene Masse unverändert ändert sich die Dichte des Urbildes $f_X(x) = f_X(g^{-1}(y))$ um den reziproken Streckungsfaktor $\frac{1}{\left|g'(g^{-1}(y))\right|}$.

Zusammensetzen von Urbild-Dichte und Streckungsfaktor:

$$f_Y(y) = f_X(g'(g^{-1}(y))) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Besonders bei der späteren Herleitung der multivariaten Transformationsformel (WT Kapitel 13) erweist sich die geometrische Sichtweise als sehr hilfreich.

dort: Determinante der Hesse-Matrix $\Rightarrow$ lokale Volumenstreckung der Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.