0.1 Setting

-Filtration F_t repräsentiert das Wissen zum Zeitpunkt t
-Ausübungszeitpunkt der Option τ
-Zuschlagspreis K
- stetige Dividendenzahlungen $D_t \leq 0$ (eigentlich ≥ 0?)
-Zero-Kupon-Bond $B(0,t) = E\left[\exp^{-\int_0^t r_s ds} |F_0\right]$ mit Short Rate r_t

Dann ist der Wert der Aktie in $t = 0$ gerade:

$$S_0 = E\left[\int_0^\infty B(0,s) D_s ds | F_0\right] = \int_0^\infty B(0,s) E\left[D_s | F_0\right] ds \tag{1}$$

0.2 Folgen der Option auf den Aktienpreis

Mit dem Vorhandensein einer Option auf eine Aktie gibt es für die Zukunft zwei Szenarien. Das eine ist, dass zum Ausübungszeitpunkt τ die Option ausgeführt wird, im zweiten Szenario passiert dies nicht. Dies bedeutet, dass Gleichung 1 für einen Optionsinhaber nicht zwingend gelten muss. Um nachzuprüfen wie sich der Aktienpreis aus Sicht eines Optionsverkäufers verändert betrachten wir zunächst die beiden möglichen Ausgänge zum Zeitpunkt τ.

0.2.1 1. Fall: $S_\tau > K$

Im Fall, dass der Aktienpreis S_τ im Ausübungszeitpunkt größer als der Zuschlagspreis K ist, wird die Option ausgeführt. Die Aktie wechselt also ihren Besitzer und der Verkäufer der Kaufoption muss die Aktie an den Käufer abgeben und partizipiert nicht mehr an der weiteren Entwicklung der Aktie. Es ergibt sich daher der folgende Aktienwert S_0^1 in $t = 0$ für den Aktienhalter:

$$S_0^1 = \int_0^\tau B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds + K \cdot B(0,\tau) \tag{2}$$

0.2.2 2. Fall: $S_\tau \leq K$

Ist der Aktienpreis S_τ zum Ausübungszeitpunkt τ maximal so hoch wie der Ausübungspreis K, so wird die Option nicht ausgeführt. Die Aktie bleibt demnach beim Verkäufer der Kaufoption und dieser partizipiert weiter an der Entwicklung des Aktienkurses. Damit ergibt sich für diesen Fall für den Wert der Aktie S_0^2 in $t = 0$ folgendes:

$$S_0^2 = \int_0^\infty B(0,s) E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \tag{3}$$

0.2.3 Erwarteter Aktienwert in $t = 0$

Die beiden Fälle repräsentieren je einen zukünftigen Fall der Entwicklung des Aktienkurses. Zusammengenommen wird sogar das gesamte Spektrum an möglichen Fällen abgedeckt. Damit ergibt sich aus Sicht des Verkäufers der Option als Wert der Aktie in $t = 0$ gerade der gewichtete Wert der beiden vorherigen

Werte, was dem Erwartungswert entspricht. Es gilt also für den zusammengesetzten Wert S_0^3:

$$S_0^3 = S_0^1 \cdot P(\{S_\tau > K\}) + S_0^2 \cdot P(\{S_\tau \leq K\}). \tag{4}$$

Dabei stellt sich die Frage wie sich dieser Aktienwert aus Sicht des Verkäufers der Option im Vergleich mit einem normalenÄktienbesitzer verhält. Also ob der Wert sich ändert oder gleich bleibt. Dafür wird S_0^3 umgeformt.

$$\begin{aligned}
S_0^3 =& S_0^1 \cdot P(\{S_\tau > K\}) + S_0^2 \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
=& \left[\int\limits_0^\tau B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds + K \cdot B(0,\tau) \right] \cdot P(\{S_\tau > K\}) \\
&+ \left[\int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
\overset{S_\tau > K}{<}& \left[\int\limits_0^\tau B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds + S_\tau \cdot B(0,\tau) \right] \cdot P(\{S_\tau > K\}) \\
&+ \left[\int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
=& \left[\int\limits_0^\tau B(0,s) E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds + \int\limits_\tau^\infty B(\tau,s) E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds B(0,\tau) \right] P(\{S_\tau > K\}) \\
&+ \left[\int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
\overset{5}{=}& \left[\int_0^\tau B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds + \int\limits_\tau^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau > K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau > K\}) \\
&+ \left[\int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
=& \int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \{S_\tau > K\}\right] ds \cdot P(\{S_\tau > K\}) \\
&+ \left[\int\limits_0^\infty B(0,s) \cdot E\left[D_s | F_0 \cap \{S_\tau \leq K\}\right] ds \right] \cdot P(\{S_\tau \leq K\}) \\
=& S_0
\end{aligned}$$

Wobei für $s > \tau$ gilt:

$$\begin{aligned} B(0,\tau) \cdot B(\tau,s) =& E\left[\exp(-\int\limits_0^\tau r_x dx - \int\limits_\tau^s r_x dx)|F_0\right] \\ =& E\left[\exp(-\int\limits_0^s r_x dx)|F_0\right] \\ =& B(0,s) \end{aligned} \tag{5}$$

Es gilt also, dass der Wert der Aktie für einen Kaufoptionsverkäufer geringer ist als wenn er diese Option nicht verkauft.